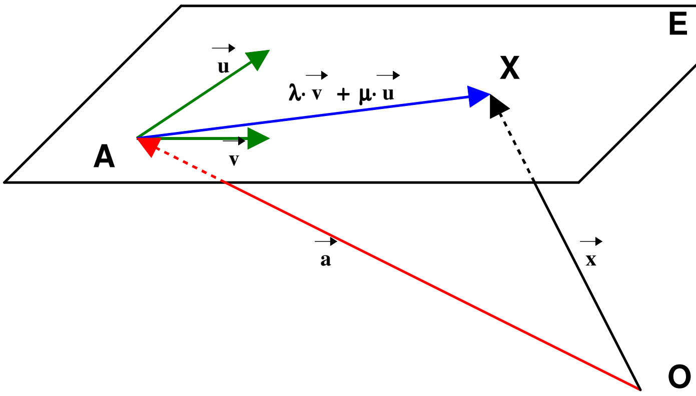
VI. Ebenengleichungen in Parameterform

===6

6.1. Definition



Definition :

Gegeben sei eine Ebene E und ein Punkt $A \in E$ mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und zwei nicht kollineare **Richtungsvektoren** $\vec{v}$, $\vec{u} \neq \vec{o}$, parallel zur Ebene.

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist dann der Vektor

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} \quad (*)}$$

der Ortsvektor eines Punktes X auf der Ebene und umgekehrt.

(*) heißt **Ebenengleichung** der Ebene E in **Parameterform** mit den Parameter λ und μ.

A heißt **Aufpunkt** der Ebene E.

Beispiel :

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jedes Paar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ergibt den Ortsvektor eines Punktes auf der Ebene, z.B.

$$\lambda = 1, \mu = -1 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X(3 \mid -3 \mid 3) \in E$$

Der Punkt $P(1 \mid 3 \mid -2)$ liegt nicht in E, denn P in die Gleichung von E eingesetzt ergibt

(1)	$3+\lambda+\mu = 1$
(2)	$-3\lambda = 3$
(3)	$1+\lambda-\mu = -2$
aus (2)	$\lambda = -1$
in (1)	$3-1+\mu = 1 \Rightarrow \mu = -1$
in (3)	$1-1+1 = -2$ (f)

Zur zeichnerischen Darstellung berechnet man die Gleichungen der Schnittgeraden (**Spurgeraden**) mit den Koordinatenebenen bzw. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichnet ein **Schrägbild** :

x_1x_2-Ebene : $x_3 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \mu = \lambda + 1$

$$s_{12} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + (\lambda+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

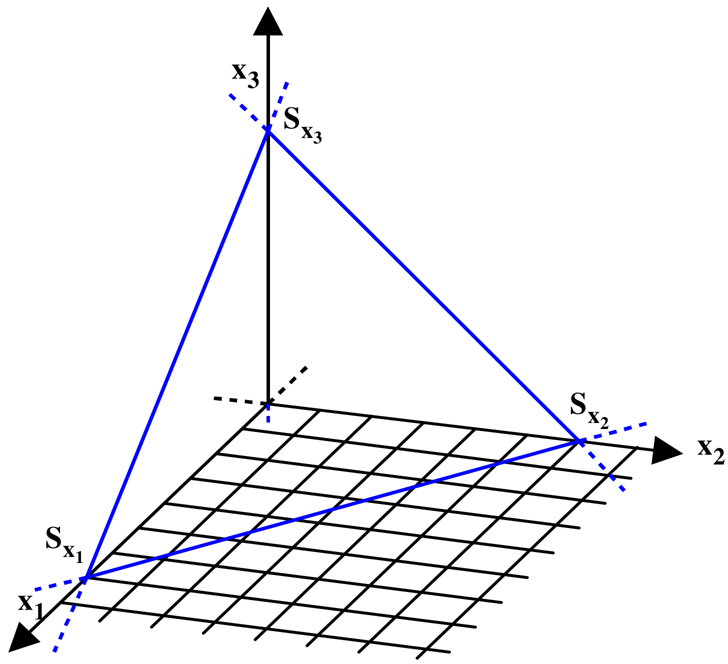
$$s_{12} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit ergeben sich die Schnittpunkte mit der x_1- bzw. x_2-Achse

$S_{x_1}\left(4 \mid 0 \mid 0\right)$ und $S_{x_2}\left(0 \mid 6 \mid 0\right)$

Analog : $S_{x_3}\left(0 \mid 0 \mid 4\right)$

Schrägbild :



Beachte : Oft ist es günstig, die x_2 – Achse etwas schräg nach vorne laufen zu lassen.

6.2 Anwendungen

---

1. Dreipunkteform

Satz :

Eine Gleichung der Ebene E(ABC) durch die drei Punkte A, B und C mit den Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ lautet

$$\boxed{\mathbf{E(ABC)} : \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \lambda\left(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\right) + \mu\left(\vec{\mathbf{c}} - \vec{\mathbf{a}}\right)} \quad \textbf{(Drei-Punkte-Form)}$$

Bemerkung :

Eine Ebene kann auch festgelegt werden durch

a) eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt

b) zwei sich schneidende Geraden

c) zwei parallele, nichtidentische Geraden

Beachte :

1. Der Richtungsvektor einer Geraden, die in der Ebene liegt, ist auch ein Richtungsvektor der Ebene.

2. Der Differenzvektor der Ortsvektoren zweier Punkte in der Ebene ergibt ebenfalls einen Richtungsvektor der Ebene.

2. Lagebeziehungen zu Punkten

Satz :

Ein Punkt P liegt genau dann auf der Ebene E mit der Gleichung

$$E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} ,$$

wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für den Ortsvektor $\vec{p}$ von P gilt $\vec{p} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$

2. Lagebeziehung zu Geraden

Satz :

Für eine Ebene E und eine Gerade g mit

$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$ und $g: \vec{x} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{g \parallel E \Leftrightarrow \left\{ \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \right\} \text{ linear abhängig}}}$$

Beachte :

a) $\left\{ \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \right\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\left| \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \right| = 0$

b) g ist echt parallel zu E, wenn der Aufpunkt B von g nicht in E liegt oder $\left\{ \vec{v}, \vec{u}, \vec{b} - \vec{a} \right\}$ linear unabhängig ist.

Ansonsten gilt die Schnittpunktsbedingung :

$$\mathbf{\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w}}$$

3. Lagebeziehung zwischen Ebenen

Satz :

Für zwei Ebenen E und F und h mit

$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$ und $F: \vec{x} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w} + \tau \cdot \vec{z}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{E \parallel F \Leftrightarrow \left\{ \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \right\} \text{ und } \left\{ \vec{v}, \vec{u}, \vec{z} \right\} \text{ linear abhängig}}}$$

Liegt zusätzlich der Aufpunkt von E in F und umgekehrt, dann sind E und F identisch.

Ansonsten gilt die Schnittpunktsbedingung $\mathbf{\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w} + \tau \cdot \vec{z}}$

Bemerkung :

Beim Schnitt zweier Ebenen erhält man 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Man verwendet eine Unbekannte als Lösungsparameter. Dieser Parameter ist der Parameter der Schnittgeraden.

6.3 Koordinatengleichungen von Ebenen

Satz und Definition :

Genau dann liegt ein Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ bzgl. eines Koordinatensystems in einer Ebene mit der Parametergleichung

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}},$$

wenn die Vektoren $\vec{x} - \vec{a}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind.

Die mit $\vec{x} - \vec{a}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildete Determinante hat dann den Wert Null.

$$\left| \vec{x} - \vec{a}, \vec{v}, \vec{u} \right| = 0 \quad (*)$$

Die Gleichung (*) heißt eine **Koordinatengleichung** der Ebene.

Jede Koordinatengleichung einer Ebene lässt sich auf die Form

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$$

bringen.

Beweis :

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} \iff (\vec{a} - \vec{x}) + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} = \vec{o} \iff$

$\iff \left\{ \vec{x} - \vec{a}, \vec{v}, \vec{u} \right\}$ ist linear unabhängig $\iff \left| \vec{x} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v} \right| = 0$

Beispiel : E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x_1-0 & 0 & -2 \\ x_2-1 & 6 & 3 \\ x_3-0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(x_2-1)+12x_3-3x_1 = 0 \Leftrightarrow -3x_1-2x_2+12x_3+2 = 0$$

Spezialfälle :

$n_1x_1+n_4 = 0$ Gleichung einer Ebene parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene
$n_2x_2+n_4 = 0$ Gleichung einer Ebene parallel zur x_1x_3-Koordinatenebene
$n_3x_3+n_4 = 0$ Gleichung einer Ebene parallel zur x_1x_2-Koordinatenebene

$n_1x_1+n_2x_2+n_4 = 0$ Gleichung einer Ebene parallel zur x_3-Koordinatenachse
$n_1x_1+n_3x_3+n_4 = 0$ Gleichung einer Ebene parallel zur x_2-Koordinatenachse
$n_2x_2+n_3x_3+n_4 = 0$ Gleichung einer Ebene parallel zur x_1-Koordinatenachse

Anwendungen :

1. Schnitt einer Ebene, die in Koordinatenform gegeben ist, mit einer Geraden

Beispiel :

Gegeben : $E : 3x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0 \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

g in E : $3(-1-\lambda) + (1+\lambda) - 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

$\lambda = -1$ in g : $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, d.h. Schnittpunkt ist $S\left(0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, -2\right)$

2. Schnitt zweier Ebenen

A Koordinatenform Paramaterform

Beispiel :

$$E: 2x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0 \quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F \text{ in } E: 2\cdot(-1+\lambda+\mu) - (2-\lambda) + (\lambda-\mu) - 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 6+4\lambda$$

$$\mu = 6+4\lambda \text{ in } F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (6+4\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade}: s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

B Koordinatenform - Koordinatenform

Bei der Bestimmung gemeinsamer Punkte zweier Ebenen, deren Koordinatengleichungen gegeben sind, ergeben sich folgende Fälle :

a) Eine Gleichung ist ein Vielfaches der anderen. Dann sind beide Ebenen identisch.

Beispiel :

$$E: \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 1 = 0$$
$$F: \quad -4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 2 = 0$$

b) Die beiden Gleichungen widersprechen sich. Dann sind beide Ebenen parallel.

Beispiel :

$$E: \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 1 = 0$$
$$F: \quad -4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

c) Zwei Unbekannte können so gewählt werden, dass sich das ergebende unterbestimmte Gleichungssystem nach Parametrisierung lösen lässt. Es ergibt sich die Gleichung der Schnittgeraden.

Beispiel :

$$E: \; 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0 \quad (1)$$
$$F: \; 2x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + 2 \cdot (2) \,\Big|\, 6x_1 + 3x_2 + 3 = 0$$

Parametrisierung : $x_1 = \sigma \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - 2\sigma$

in (2) $\Big|\, 2\sigma - 1 - 2\sigma + x_3 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1$

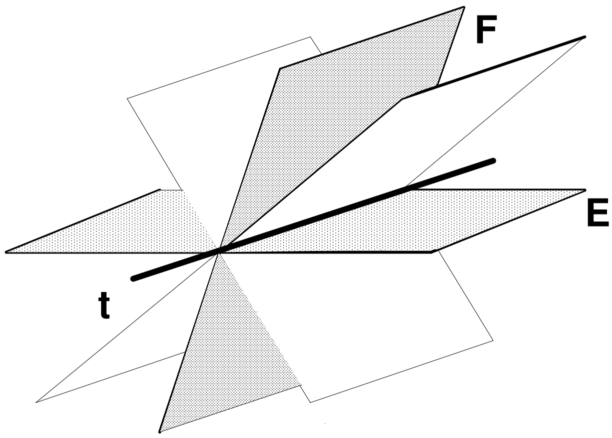
$$s: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz :

Zwei Ebenen in Koordinatenform sind genau dann parallel, wenn die Koeffizienten der linearen Glieder (sprich der x_i) durch Multiplikation mit derselben Zahl auseinander hervorgehen.

Sie sind identisch, wenn die Koordinatengleichung der einen Ebene ein Vielfaches der anderen ist.

6.5 Ebenenscharen



Satz und Definition :

Gegeben sind zwei Ebenen $\begin{array}{ll} E: & n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0 \\ F: & m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4 = 0 \end{array}$

mit der gemeinsamen Schnittgeraden s.

Dann ist für jedes $k \in \mathbb{R}$

$G: (n_1x_1 + x_2 + n_3x_3 + n_4) + k(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4) = 0 \ (*)$

die Gleichung einer Ebene durch s.

(*) beschreibt eine von E und F erzeugte **Ebenenschar** mit der **Trägergeraden** s.

Bemerkungen :

a) Die Ebene F gehört allerdings der Schar nicht an.

$G^*: l(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4) + k(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4) = 0 \quad l, k \in \mathbb{R}$

ist eine zweiparametrige Schar, die alle Ebenen durch s enthält.

b) Sind E und F parallel, dann erzeugen E und F auf obige Weise eine **Parallelenschar**.

Beispiel :

Zeige, dass alle Ebenen der Schar $E_a : x_1 - ax_2 + x_2 + ax_3 - 1 = 0$ eine Gerade gemeinsam haben.

Umordnen : $(x_1 + x_2 - 1) + a(-x_2 + x_3) = 0$

Sei $E: x_1 + x_2 - 1 = 0$ und $F: -x_2 + x_3 = 0$

$$E \cap F: \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &= 0 \qquad (1) \\ -x_2 + x_3 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

$x_3 = \lambda$: in (2) $\Rightarrow x_2 = \lambda$ in(1) $\Rightarrow x_1 = 1 - \lambda$

Trägergerade : $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6.6 Projektionen

---

1. Die Parallelprojektion

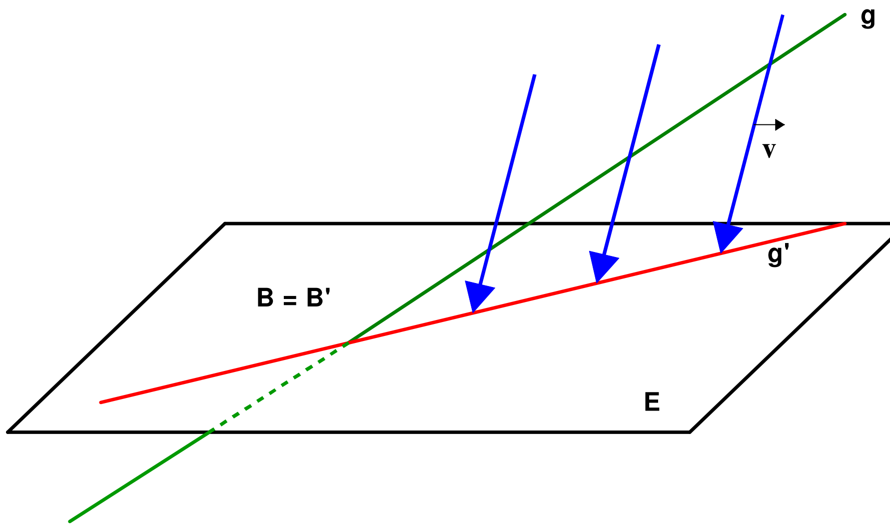


Bild : Parallelprojektion einer Geraden in eine Ebene

Definition und Satz :

Gegeben sei eine Ebene E und ein Vektor $\vec{v} \nparallel E$:

Ist A ein Punkt des Raumes mit dem Ortsvektor $\vec{a}$, dann heißt der Schnittpunkt der Geraden

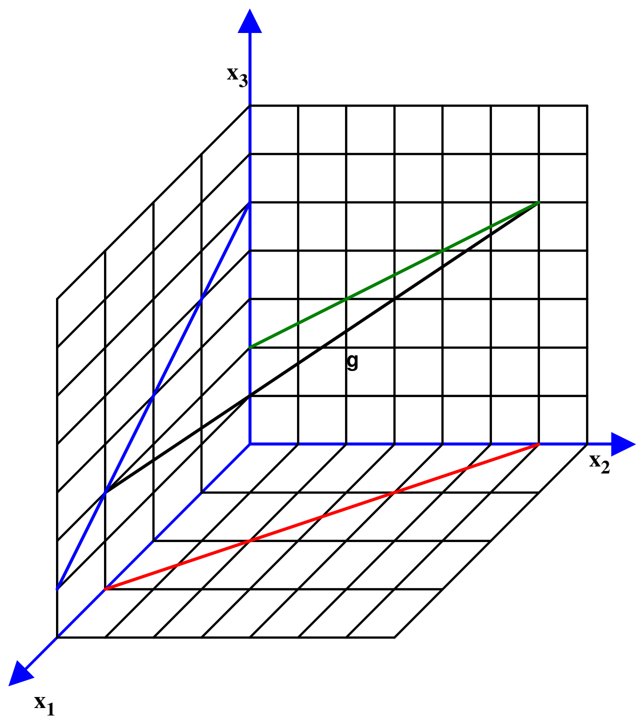
$$p : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$$

mit der Ebene E der Bildpunkt A' des Punktes A bei der **Parallelprojektion** auf die Ebene E in Richtung von $\vec{v}$.

Bei der Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene bleibt das Teilverhältnis erhalten, d.h. ist T ein Teilpunkt der Strecke [AB], dann gilt

$$\boxed{\lambda(AB\, ;\, T) = \lambda(A'B'\, ;\, T')}$$

Sonderfälle :



Die Projektion in die	in Richtung der	heißt
x_1x_2-Ebene	x_3-Achse	**Grundriss**
x_2x_3-Ebene	x_1-Achse	**Aufriss**
x_1x_3-Ebene	x_2-Achse	**Seitenriss**

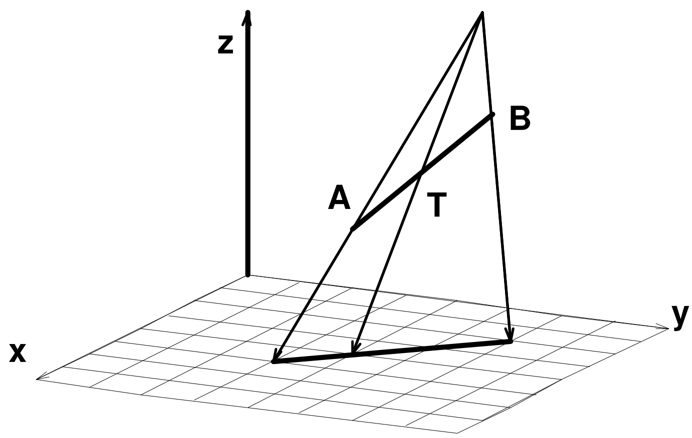
Ist $A\left(a_1 \,\middle|\, a_2 \,\middle|\, a_3\right)$ ein Punkt und $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ eine Gerade des Raumes, dann ist das

Bild von A bzw. g

beim Grundriss $A'\left(a_1 \middle| a_2 \middle| 0\right)$ bzw. $g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analoges gilt für den Aufriss und den Seitenriss.

2. Die Zentralprojektion



Definition und Satz :

Gegeben seien eine Ebene E und ein Punkt $Z \notin E$:

Ist A ein Punkt des Raumes , so dass $ZA \nparallel E$, ist dann heißt der Schnittpunkt der Geraden ZA mit der Ebene E der Bildpunkt A' des Punktes A bei der **Zentralprojektion** von Z auf die Ebene E.

Bei der Zentralprojektion auf eine Ebene bleibt das **Doppelverhältnis** erhalten, d.h. sind T und S zwei Teilpunkte einer Strecke [AB], dann gilt

$$\boxed{\frac{\lambda(AB\,;\,T)}{\lambda(AB\,;\,S)} = \frac{\lambda(A'B'\,;\,T')}{\lambda(A'B'\,;\,S')}}$$
