III. Lineare Gleichungssysteme

==

3.1 Einführung

Definition :

Die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&(2)\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \\
&(m)\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
\qquad a_{ij},\, b_i\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n) \in \mathbb{R}
$$

bilden ein reelles, **lineares Gleichungssystem** aus m Gleichungen mit n Unbekannten.

Ist $b_i = 0,\ 1 \le i \le m$, dann heißt das System **homogen**.

Die Lösungsmenge besteht aus allen n-Tupeln reeller Zahlen $\left(x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n\right)$, die beim Einsetzen jede Gleichung in eine wahre Aussage überführen.

Lineare Gleichungen löst man mit dem Additions- und Subtraktionsverfahren. Folgende Fälle sind möglich

a) Die Umformungen führen auf eine Gleichung mit einer Unbekannten x_i.

Dann besitzt das Gleichungssystem genau ein -Tupel als Lösung.

b) Die Umformungen führen auf einen Widerspruch.

Dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

c) Die Umformungen führen auf eine Gleichung mit $k > 1$ Unbekannten. Dann werden $k-1$ Unbekannte durch Parameter ersetzt. Man enthält dann unendlich viele parameterabhängige Lösungen.

Beispiele :

a) Eindeutig lösbares Gleichungssystem

	(1) $-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$ (2) $3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1$ (3) $-4x_1 - x_2 + 4x_3 = -6$	
$(1) + 3 \cdot (3)$	$-14x_1 + 10x_3 = -8$	(4)
$2 - 2 \cdot (3)$	$11x_1 - 11x_3 = 11 \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 1$	(5)
$(4) + 10 \cdot (5)$	$-4x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -0{,}5$	
$x_1 = -0{,}5$ in (5)	$x_3 = -1{,}5$	
$x_1 = -0{,}5$ und $x_3 = -1{,}5$ in (1)	$x_2 = 2$	

$$L = \left\{(-0{,}5 \mid 2 \mid -1{,}5)\right\}$$

----

b) Nicht eindeutig lösbares Gleichungssystem

	(1) $x_1 + x_2 - x_3 = 4$ (2) $-2x_1 - x_2 = 0$ (3) $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 20$	
$(3) - 5 \cdot (1)$	$-4x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (2)$	
Parametrisierung von (2) : $x_1 = a$	$x_2 = -2a$	(5)
$x_1 = a$ und $x_2 = -2a$ in (1)	$x_3 = -a - 4$	

$$L = \left\{(a \mid -2a \mid -a-4) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

c) Unlösbares Gleichungssystem

	(1) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ (2) $-x_1 + 2x_2 = -3$ (3) $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2$	
$4 \cdot (1) - 3 \cdot (3)$	$-x_1 + 2x_2 = -6$	(4)

(4) steht im Widerspruch zu (2) $L = \{ \}$

---

d) Überbestimmtes Gleichungssystem

	(1) $x_1 + x_2 = 1$ (2) $x_2 + x_3 = -1$ (3) $x_1 + x_3 = 1$ (4) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$	
$(3) - (2)$	$x_1 - x_2 = 2$	(4)
$(1) + (4)$	$x_1 = 1{,}5$	
$x_1 = 1{,}5$ in (1)	$x_2 = -0{,}5$	
$x_1 = 1{,}5$ in (3)	$x_3 = -0{,}5$	
Alles in (4)	$1{,}5 - 0{,}5 - 0{,}5 = 3$ (f)	

Also $L = \{ \}$

---

e) Unterbestimmtes Gleichungssystem

	(1) $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ (2) $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$	
(1) − (2)	$-3x_2 + 3x_3 = 3 \Leftrightarrow -x_2 + x_3 = 1$	(3)
Parametrisierung von (3) : $x_2 = a$	$x_3 = 1 + a$	
$x_2 = a$ und $x_3 = 1 + a$ in (1)	$x_1 = -0{,}5 - 0{,}5a$	

$$L = \left\{ (-0{,}5 - a \mid a \mid 1 + a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

3.2 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und mit zwei Unbekannten - Determinanten

---

Wir bestimmen die allgemeine Lösung eines normalen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten :

	$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$	(1)
	$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$	(2)
$b_2 \cdot (1)$	$a_1b_2x_1 + b_1b_2x_2 = c_1b_2$	(3)
$-b_1 \cdot (2)$	$-a_2b_1x_1 - b_1b_2x_2 = -c_2b_1$	(4)
$(3) + (4)$	$a_1b_2x_1 - a_2b_1x_1 = c_1b_2 - c_2b_1$ $(a_1b_2 - a_2b_1)2x_1 = c_1b_2 - c_2b_1$	
Analog ergibt sich	$(a_1b_2 - a_2b_1)x_2 = a_1c_2 - a_2c_1$	

Fallunterscheidung :

A $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Es gibt **ein Lösungspaar** : $x_1 = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ und $x_2 = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

B $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ und $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$.

Dann ist auch $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ und wegen $0 \cdot x_1 = 0$ bzw. $0 \cdot x_2 = 0$

gibt **unendlich viele Lösungen**.

Man setzt dann $x_1 = a$ und bestimmt aus einer der beiden Gleichungen x_2 in Abhängigkeit von a.

C $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ und $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$.

Dann ist auch $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ und es gibt **keine Lösungen**.

Satz :

Das Gleichungssystem

$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$ (1)

$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$ (2)

hat genau dann eine **einzige Lösung**, wenn $\boxed{\mathbf{D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0}}$ ist.

Die Lösungen lauten dann

$$\boxed{\mathbf{x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}}} \text{ und } \boxed{\mathbf{x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}}}$$

Das Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**, wenn

$$\boxed{\mathbf{D = 0 \text{ und } D_1 = 0 \text{ bzw. } D_2 = 0}}$$

Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**, wenn

$$\boxed{\mathbf{D = 0 \text{ und } D_1 \neq 0 \text{ bzw. } D_2 \neq 0}}$$

Beispiel :

Bestimme die Lösungsmenge von

$$\begin{array}{ll} (1) & kx_1 + x_2 = 1 \\ (2) & x_1 + x_2 = k \end{array} \quad , k \in \mathbb{R}$$

in Abhängigkeit vom Parameter k.

Es ist $D = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k - 1$, $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k$ und $D_2 = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$,

1. Fall : $k \neq 1$

Dann ist $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{1-k}{k-1} = -1$ und $x_2 = \dfrac{k^2-1}{k-1} = k+1$

$L = \left\{ (-1 \mid k+1) \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\}$

2. Fall : $k = 1 \Rightarrow D = D_1 = D_2 = 0$

Es gibt unendlich viele Lösungen.

Es ist $(1) = (2) : x_1 + x_2 = 1$

Parametrisierung : $x_1 = a \Rightarrow x_2 = 1-a$

$L = \left\{ (a \mid 1-a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$

Folgerung :

Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ im Vektorraum der reellen 2-Tupel sind also genau dann **linear abhängig**, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist.

3.3 Lineare Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

---

Definiert man dreireihige Determinanten gemäß

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_b \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1,$$

dann gilt für das lineare Gleichungssystem

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \qquad (1)$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \qquad (2)$$

$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \qquad (3)$$

Satz:

A Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn $\boxed{\mathbf{D} = \left|\begin{matrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{matrix}\right| \neq \mathbf{0}}$

ist. Die Lösungen lauten dann mit

$$\mathbf{D_1} = \left|\begin{matrix} \mathbf{d_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{d_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{d_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{matrix}\right| \text{ und } \mathbf{D_2} = \left|\begin{matrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{d_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{d_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{d_3} & \mathbf{c_3} \end{matrix}\right| \text{ sowie } \mathbf{D_3} = \left|\begin{matrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{d_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{d_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{d_3} \end{matrix}\right|$$

$$\boxed{\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{D_1}}{\mathbf{D}} \qquad \mathbf{x_2} = \frac{\mathbf{D_2}}{\mathbf{D}} \qquad \mathbf{x_3} = \frac{\mathbf{D_3}}{\mathbf{D}}}$$

B Das Gleichungssystem besitzt **unendlich viele Lösungen**, wenn

$$\boxed{\mathbf{D = 0 \text{ und } D_1 = 0 \text{ und } D_2 = 0 \text{ und } D_3 = 0}}$$

C Das Gleichungsystem besitzt **keine Lösung**, wenn

$$\boxed{\mathbf{D = 0 \text{ oder } D_1 \neq 0 \text{ oder } D_2 \neq 0 \text{ oder } D_3 \neq 0}}$$

Beispiel :

Ermittle die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} &(1)\quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ &(2)\quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ &(3)\quad x_1 - 4x_3 = 1 \end{aligned}$$

Es

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 2 + 0 + 6 - 0 - 8 = 4$$

d.h. das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 12 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 7 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{7}{4} \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

$$L = \left\{ \left(3 \,\middle|\, 1{,}75 \,\middle|\, 0{,}5 \right) \right\}$$

Beispiel :

$$\begin{aligned} &(1)\quad ax_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ &(2)\quad -x_1 + x_2 = -1 \\ &(3)\quad x_1 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

a) $$D = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Das Gleichungssystem ist für $a \neq 3$ eindeutig lösbar.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-1}{a-3} = \frac{1}{3-a}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a+2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2-a}{a-3}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a-2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{a-2}{a-3}$$

b) Sei $a = 3$.

(1) $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
(2) $-x_1 + x_2 = -1$
(3) $x_1 + x_3 = 0$

(1) + (2) ergibt $2x_1 + 2x_3 = -1$ im Widerspruch zu (3).

$L = \{\ \}$

Beispiel :

Ermittle die Lösungsmenge von

(1) $kx_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$
(2) $kx_2 + x_3 = 0$
(3) $x_1 - x_2 + x_3 = -1$

in Abhängigkeit vom Parameter k.

Lösung :

Es ist $D = \begin{vmatrix} k & -2 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2$ sowie

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3k+3\ ,\ D_2 = \begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k+1 \text{ und } D_3 = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2-k$$

$D = 0 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 2$

1. Fall : $k \neq -1, 2$

Dann ist $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{3k+3}{k^2-k-2} = \dfrac{3}{k-2}$. Analog erhält man $x_2 = \dfrac{1}{k-2}$ und $x_3 = \dfrac{-k}{k-2}$

Also $L = \left\{ \left(\dfrac{3}{k-2} \mid \dfrac{1}{k-2} \mid \dfrac{-k}{k-2} \right) \middle| \, k \in \mathbb{R} \right\}$

2. Fall : $k = -1 \Rightarrow D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$

Dann hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Einsetzen von $k = -1$ ergibt schließlich $L = \left\{ \left(-1 \mid a \mid a \right) \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$

3. Fall : $k = -2 \Rightarrow D = 0\ , D_1, D_2, D_3 \neq 0$

Dann ist das Gleichungssystem unlösbar.

Beispiel :

Gegeben ist das Gleichungssystem
$$\begin{array}{ll} (1) & ax_1 - x_2 + x_3 = b \\ (2) & -x_1 + x_2 = -1 \\ (3) & 2ax_1 - 2x_3 = b \end{array}$$

a) Für welche Werte von a besitzt das Gleichungssytem genau eine Lösung ?

b) Bestimmen Sie alle Werte von b, für die das System dann unendlich viele Lösungen besitzt.

Lösung :

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2a & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a + 2 = 0 \iff a = 0{,}5$$

$$\text{b) } D_1 = \begin{vmatrix} b & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3b + 2 = 0 \iff b = \frac{2}{3}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0{,}5 & b & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3b = 0 \iff b = \frac{2}{3}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0{,}5 & -1 & b \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = -1{,}5b + 1 = 0 \iff b = \frac{2}{3}$$

Anwendung :

Satz :

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit den Koordinatendarstellungen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

bzgl einer Basis eines dreidimensionalenn Vektorraums sind genau dann **linear abhängig**, wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ansonsten sind sie linear unabhängig.

Beweis :

Das Gleichungssystem, das sich aus

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

ergibt, hat die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ist $D = 0$, dann muss es folglich unendlich viele Lösungen geben, und damit existiert eine nichttriviale Nullsumme.

Beispiel :

Die Vektoren mit den Koordinatendarstellungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig,

denn

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = (45 - 96 + 84) - (105 - 48 + 72) = -96 \neq 0$$
