Abitur 2008		Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $P\left(-8 \mid -4 \mid 1\right)$ und

$P\left(7 \mid 8 \mid 17\right)$ sowie die Gerade $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1\. a) Bestimmen Sie den Geradenpunkt R zum Parameterwert $\lambda = 30$ und zeigen Sie, dass Q nicht auf der Gerade g liegt.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt Q und die Gerade g enthält in Normalenform. Welche besondere Lage hat diese Ebene im Koordinatensystem ?

$\left[\text{mögliches Teilergebnis : } E: 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0\right]$

c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F\left(7 \mid -4 \mid 1\right)$ Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade g ist. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes Q von der Gerade .

$\left[\text{Ergebnis : } d = 20\right]$

d) Der Punkt Q' ensteht durch Spiegelung des Punktes Q an der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q'.

$\left[\text{Ergebnis : } Q'\left(7 \mid -16 \mid\right) -15\right]$

e) Begründen Sie, dass das Viereck QPQ'R eine Raute ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, die die gegenseitige Lage der Geraden g und der Punkte Q, P, Q' und F veranschaulicht.

Wählen Sie hierfür die Ebene E als Zeichenebene.

f) Berechnen Sie alle Innenwinkel der Raute und den Abstand h paralleler Rautenseiten.

$\left[\text{Teilergebnis : } h = 24\right]$

2\. In der Ebene E liegt ein Gitter mit kongruenten rautenförmigen Öffnungen. Eine dieser Rauten ist ein Viereck QPQ'R. Zudem ist eine Kugel mit dem Radius $r = 13$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass diese Kugel nicht durch die Gitteröffnungen passt.

b) Die Kugel liegt so in der Öffnung QPQ'R, dass sie alle 4 Seiten dieser Raute berühre.

Berechnen Sie den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Gitterebene E.

Lösung

===

1. a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 30 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $R\left(22 \mid -4 \mid 1\right)$.

Q in g : (1) $7 = -8+\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 15$ (2) $8 = -4$ (f)

Q liegt also nicht auf der Geraden g.

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor : $\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenform von E : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0$

Die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse des Koordinatensystems.

c) $\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{QF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

F in g : (1) $7 = -8+\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 15$ (2) $-4 = -4$ (w) (3) $1 = 1$ (w)

Also ist F Fußpunkt des Lotes von Q auf g.

$d(Q; g) = \overline{QF} = \sqrt{(-12)^2 + 16^2} = 20$

d) $\overrightarrow{q'} = \vec{q} + 2 \cdot \overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ 49 \end{pmatrix}$

e)

Es genügt zu zeigen, dass F der Mittelpunkt $[PR]$ ist.

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-8\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}22\\-4\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$\overline{PQ} = 30$ ergibt $\mathfrak{A}_{QPQ'R} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40 = 600$

f) Es ist $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \gamma \approx 106° \;\; \beta = \delta \approx 74°$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}15\\12\\16\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{PQ} = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25 \quad\Rightarrow\quad h = \frac{\mathfrak{A}_{QPQ'R}}{\overline{PQ}} = \frac{600}{24} = 24$$

---

2. a) $2r = 26 > 24$

b) $d(M;E) = \sqrt{13^2-12^2} = 5$
