Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow \dfrac{8x}{x^2+4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f an den Rändern des DefinItionsbereichs und geben Sie die Nullstelle von f an.

   b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.

$$\left[\text{Teilergebnis : Hochpunkt } \left(2 \mid 2\right)\right]$$

   c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Ursprung.

   Berechnen Sie f(1) und f(6) und skizzieren Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-6 \leq x \leq 6$.

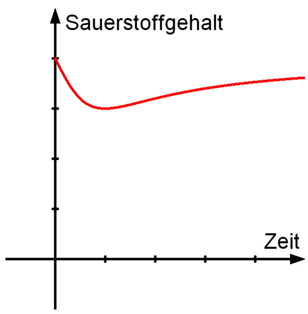
   b) Begründen Sie, dass f im Intervall $\left[-2;\, 2\right]$ umkehrbar ist. Tragen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.c) ein.

   Die Funktion $F: x \rightarrow 4 \cdot \ln(x^2+4)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich)

   e) Der Graph von f und der Graph der Umkehrfunktion g schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt A dieses Flächenstücks.

---

2. Unmittelbar nach der einmaligen, kurzzeitigen Einleitung von Abwasser in einem See kommt es zu einem Absinken des Sauerstoffgehalts im See.

   Da die Abwasserbelastung nicht zu hoch ist, führt die Selbstreinigung des Sees schließlich wieder zu einer Erhöhung des Sau erstoffgehalts.

   Die Funktion

   $h: x \rightarrow 8 - f(x),\ D_h = \mathbb{R}_0^+,$

   beschreibt näherungsweise den Sauerstoffgehalt des Sees an der Einleitungsstelle.

   Dabei ist x die Anzahl der seit Einleitung des Abwassers vergangenen Tage, h(x) die Maßzahl des Sauerstoffgehalts in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

Die Abbildung veranschaulicht den Verlauf des GrapHen von h.

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f hervorgeht. Nach wie vielen Tagen erreicht der Sauerstoffgehalt einen kleinsten Wert und wie hoch ist dieser ?

b) Berechnen Sie, wann der Sauerstoffgehalt wieder auf 95% des ursprünglichen Wertes angestiegen ist.

c) Der mittlere Sauerstoffgehalt (in $\frac{mg}{l}$) an der Einleitungsquelle ist für einen Zeitraum von 20 Tagen nach Einleitung des Abwassers gegegeben durch $\frac{1}{20}\int_0^{20} fh(x)dx$.

Bestimmen Sie damit den mittleren Sauerstoffgehalt für diesen Zeitraum.

Lösung

==

1. a) $f(-x) = \frac{8\cdot(-x)}{(-x)^2+4} = -\frac{8x}{x^2+4} = -f(x)$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $O\left(0;\, 0\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x+\frac{4}{x}} = 0+0$$

Wegen der Punktsymmetrie des Graphen gilt dann

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-0$$

Nullstelle von f : $x = 0$

$$f'(x) = \frac{8\cdot(x^2+4)-8x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -2 \vee x = 2$$

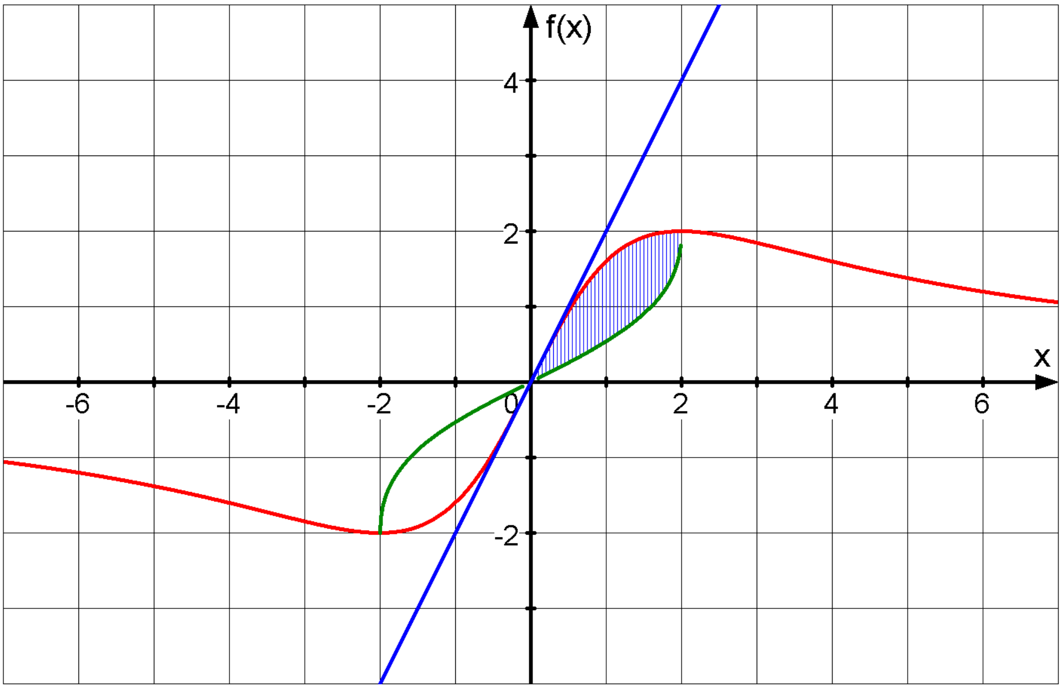
Monotonieverhalten von f :

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$32-8x^2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+4)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
	smf	sms	smf

Also ist $T\left(-2;\ -2\right)$ ein Tiefpunkt und $H\left(2;\ 2\right)$ ein Hochpunkt des Graphen.

$f\,'(0) = 2$ und damit ist $t_0 : y = 2x$ die Tangente im Ursprung.

$f(1) = 1{,}6$ und $f(6) = 1{,}2$



d) $\mathfrak{A}_1 = \int_0^2 \left(\frac{8x}{x^2+2} - \right)dx = \left[4\cdot\ln(x^2+4) - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\cdot\ln8 - 2 - 4\cdot\ln4 = 4\ln2 - 2$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{A} = 8\cdot\ln2 - 4 = 4\cdot(2\cdot\ln2 - 1)$

---

2. a) Man erhält den Graphen von h durch Einschränkung der Funktion f auf $\mathbb{R}_0^+$, Spiegelung des Graphen der so erhaltenen Funktion an der x-Achse und anschließende Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Der niedrigste Sauerstoffgehalt wird nach zwei Tagen erreicht. Er beträgt dann $6\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$.

b) $8 - \frac{8x}{x^2+4} = 0{,}95\cdot8 \quad\Leftrightarrow\quad 7{,}6x^2 + 8x + 22{,}4 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 10 + 4\sqrt{6} \approx 19{,}8$

Der Sauerstoffgehalt ist nach 19,8 Tagen wieder auf 95% seines ursprünglichen Wertes angestiegen.

c) $\int_0^{20} h(x)dx = \left[8x - 4\cdot\ln(x^2+4)\right]_0^{20} = 160 - 4\cdot\ln 404 + 4\cdot\ln 4 = 160 - 4\cdot\ln 101$

Durchschnittlicher Sauerstoffgehalt : $\frac{1}{20}\cdot\left(160 - 4\cdot\ln 101\right) \approx 7{,}08$