Abitur 2007		Analytische Geometrie I

1. Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ die Ebenenschar

   $E_k: kx_1 + k^2x_2 + 2x_3 - k^2 = 0$

   mit $k \in \mathbb{R}$ als Scharparameter.

   a) Ermitteln Sie, für welche Werte von k die Ebene E_k den Punkt $P\left(1 \middle| 2 \middle| -3\right)$ und zugleich den Punkt $Q\left(0 \middle| 1 \middle| 0\right)$ enthält.

   b) Die beiden Ebenen E_2 und E_{-3} schneiden sich in einer Geraden g.

   Ermitteln Sie eine Gleichung von g in Parameterform und den Schnittwinkel der beiden Ebenen auf eine Dezimale gerundet.

   c) Mit $e(k)$ werde der Betrag des Abstands der Ebene E_k vom Koordinatenursprung bezeichnet. Zeigen Sie, dass $e(k) = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k^4 + 4}}$ und dass $e(k) < 1$ ist.

   d) Es gibt zwei Scharebenen, deren Schnittwinkel mit der -Achse 30° beträgt.

   Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von k.

   e) Untersuchen Sie, ob die Gerade g aus Teilaufgabe 1.b) senkrecht auf einer Ebene der Schar E_k steht.

---

2. Nun ist weiter die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M\left(1 \middle| 2 \middle| 3\right)$ und dem Radius $r = 6$ gegeben.

   Die Scharebene E_{-1} schneidet die Kugel K in einem Kreis k_S mit dem Mittelpunkt N und dem Radius r_S.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten von N und den Radius r_S.

   b) Zeigen Sie, dass der Punkt $R\left(3 \middle| 6 \middle| -1\right)$ auf dem Schnittkreis k_S liegt, und stellen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T auf, die die Kugel K im Punkt R berührt.

c) Die Ebene E_4 und die Tangentialebenen an die Kugel K in allen Punkten des Schnittkreises k_S begrenzen einen geraden Kreiskegel.

Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

d) Zeigen Sie, dass der Punkt $U\left(3 \mid -2 \mid -1\right)$ auf der Kugel K und innerhalb des Kreiskegels liegt.

Lösung

==

1. a) P in $E_k: k+2k^2-6-k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2+k-6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \vee k = -3:$

Q in $E_k: k^2-k^2 = 0$ (w)

Q liegt auf jeder Scharbene. Für $k = 2$ oder $k = -3$ liegen P und Q in E_k.

b) $E_2: 2x_1+4x_2+2x_3-4 = 0$

$E_{-3}: -3x_1+9x_2+2x_3-9 = 0$

$E_1-E_2 \quad \Rightarrow \quad 5x_1-5x_2+5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1-x_2+1 = 0$

Parametrisierung : $x_2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1+\lambda$

in $E_2: E_2: 2\cdot(-1+\lambda)+4\lambda+2x_3-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3-3\lambda$

Gleichung der Schnittgeraden g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt der Normalenvektoren : $\overrightarrow{n_{E_2}} \cdot \overrightarrow{n_{E_{-3}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = -6+36+4 = 34$

Beträge der Normalenvektoren : $\left|\overrightarrow{n_{E_2}}\right| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24}$ bzw.

$$\left|\overrightarrow{n_{E_{-3}}}\right| = \sqrt{9+81+4} = \sqrt{94}$$

Schnittwinkel der beiden Ebenen : $\cos\varphi = \left|\dfrac{34}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{94}}\right| \Rightarrow \varphi \approx 44{,}3°$

c) HNF von E_k : $\dfrac{kx_1 + k^2x_2 + 2x_3 - k^2}{\sqrt{k^2+k^4+4}} = 0$

Abstand des Ursprungs : $d(O; E_k) = e(k) = \left|\dfrac{k\cdot + k^2\cdot 0 + 2\cdot 0 - k^2}{\sqrt{k^2+k^4+4}}\right| = \dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+k^4+4}}$

Abschätzung : $e(k) = \dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+k^4+4}} < \dfrac{k^2}{\sqrt{k^4}} = \dfrac{k^2}{k^2} = 1$

b) Skalarprodukt aus dem Normalenvektor von E_k und $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{n_{E_k}} \cdot \overrightarrow{e_3} = 2$

Beträge der Vektoren : $\left|\overrightarrow{n_{E_k}}\right| = \sqrt{k^2+k^4+4}$ bzw. $\left|\overrightarrow{n_1}\right| = 1$

Bedingung : $\sin 30° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{k^2+k^4+4}}$

$$\Rightarrow \quad k^4 + k^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\sqrt{3} \lor k = \sqrt{3}$$

e) Bedingung : $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \mu\cdot\begin{pmatrix}k\\k^2\\2\end{pmatrix}$

(1) $1 = \mu\cdot k$ (2) $1 = \mu\cdot k^2$ (3) $-3 = 2\mu$

(3) $\Rightarrow \mu = -1{,}5$ Widerspruch zu (2)

---

2. a) $E_{-1} : -x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

Lotgerade von M auf E_{-1} : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E_{-1} : E_{-1} : $-(1-\sigma) + 2+\sigma + 2\cdot(3+2\sigma) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -1$

Eingesetzt ergibt sich : $N\big(2 \mid 1 \mid 1\big)$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d(M; E_{-1}) = \overline{MN} = \sqrt{6}$

Radius des Schnittkreises : $r^2 = r_1{}^2 + \overline{MN}^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{30}$

b) Verbindungsvektor : $\overrightarrow{NR} = \vec{r} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

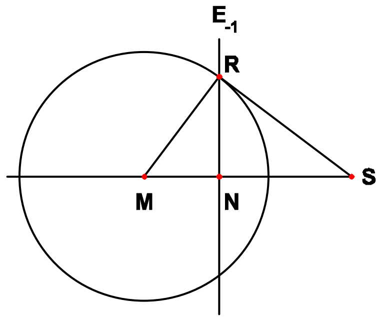
$\overrightarrow{n_{E_{-1}}} \cdot \overrightarrow{RN} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -1+5-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R \in E_{-1}$

$\overline{RN} = \sqrt{1^2+5^2+(-2)^2} = \sqrt{30}$

Also liegt R auf dem Schnittkreis von E_{-1} und K.

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{MR} = \vec{r} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Tangentialebene T an K in R : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 17 = 0$



c) Gerade MN : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnitt mit T :

$1 + \sigma + 2 \cdot (2 - \sigma) - 2 \cdot (3 - 2\sigma) - 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 6$

Spitze des Kegels : $S(7 \mid -4 \mid -9)$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{NS} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Höhe des Kegels : $h = \overline{NS} = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{6}$

Volumen des Kegels : $V = \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{30}^2 \cdot 5\sqrt{6} = 50\pi\sqrt{6}$

d) Verbindungsvektor : $\overrightarrow{MU} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{MU} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 6 \quad \Rightarrow \quad U \in K$

U liegt im Innern des Kegels, wenn $\overline{NU} < r_s$ ist.

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{NU} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{MU} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} < \sqrt{30}$
