Stochastik 2007		Aufgabe II

1.Im Raum, in dem die Abiturprüfungen für die Leistungskurse eines Gymnasiums abgehalten werden, befinden sich 20 Plätze, die in 5 Reihen zu je 4 Plätzen angeordnet sind.

In jeder Reihe ist ein Fensterplatz.

a) Zeigen Sie, dass es ca. 800 Millionen Möglichkeiten gibt, die 9 Teilnehmer des Physik-Leistungskurses auf die 20 Plätze zu verteilen, wenn 2 der 5 Reihen frei bleiben sollen.

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 12 Teilnehmer des Mathematik-Leistungskurses auf die 20 Plätze zu verteilen, wenn die 5 Fensterplätze besetzt sein sollen ?

---

2. Nach dem schriftlichen Abitur trifft sich der Mathematik-Leistungskurs in der Eisdiele "La dolce vita".

Der Pächter Roberto ist gerade ungehalten, weil er in einem Karton 4 zerbrochene Eiswaffeln entdeckt hat. Roberto bekommt seine Eiswaffeln in Kartons zu je 48 Stück.

Er berichtet, dass er schon von der letzten Lieferung aus 50 Kartons insgesamt 72 Waffeln wegwerfen musste, weil sie zerbrochen waren.

Die Kollegiaten geraten ins Fachsimpeln. Im Folgenden wird angenommen, dass im Mittel der Anteil an zerbrochenen Waffeln genau dem aus der letzten Lieferung von 2400 Waffeln entspricht und dass die zerbrochenen Waffeln zufällig verteilt sind.

a) Wie groß ist dann die W'keit dafür, dass in einem Karton genau 4 Waffeln zerbrochen sind ?

b) Wie viele Kartons muss man mindestens öffnen, um mit einer W'keit von mehr als 90% wenigstens in einem Karton genau 4 zerbrochene Waffeln vorzufinden ?

c) Wie groß ist die W'keit dafür, dass die Anzahl der zerbrochenen Waffeln in einer Lieferung von 50 Kartons um höchstens 12 vom Erwartungswert abweicht ?

Schätzen Sie diese W'keit mit der Ungleichung von Tschebyschow ab.

Die Kollegiaten bieten Roberto an, die Vermutung zu testen, dass der Anteil an zer brochenen Waffeln angestiegen ist. Dazu sollen 8 Kartons aus der neuen Lieferung zufällig ausgewählt und untersucht werden.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung auf dem Signifikanzniveau von 5% die Entscheidungsregel für den Test der Nullhypothese , dass also der Anteil p der zerbrochenen Waffeln gegenüber der letzten Lieferung nicht gestiegen ist.

---

3. Nach der Durchführung des Tests spendiert Roberto jedem der 12 Kollegiaten eine Riesenkugel Eis, wobei jeder zwischen den Geschmacksrichtungen Erdbeere, Vanille und Schokolade wählen kann.

a) Roberto notiert nur, wie oft jede Sorte gewünscht wird. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

b) Die Kollegiaten wählen achtmal Schokolade und je zweimal Erdbeere und Vanille. Roberto hat sich nicht gemerkt, wer welche Sorte bestellt hat, und gibt jedem rein zufällig eine Eiswaffel mit einer Riesenkugel in die Hand.

Mit welcher W'keit bekommt jeder das gewünschte Eis, ohne dass anschließend getauscht werden muss?

---

4. Roberto hat sich ein Rabattsystem für seine Stammkunden ausgedacht, bei dem die Höhe des Rabatts durch gleichzeitiges Werfen von zwei gleichen Laplace-Würfeln bestimmt wird, von denen jeder 4 gelbe und 2 rote Seitenflächen hat.

Von den gelben Flächen tragen jeweils drei die Aufschrift 10% und eine 15%.

Die beiden roten Flächen sind jeweils mit 15% und mit 50% beschriftet.

Man bekommt genau dann einen Rabatt, wenn beide Würfel die gleiche Farbe zeigen. Die Höhe des Rabatts ist das Maximum der beiden geworfenen Prozentzahlen.

a) Wie groß ist die W'keit dafür, dass ein Stammkunde nach dem Werfen der beiden Würfel einen Rabatt bekommt ?

b) Wie viel Prozent Rabatt räumt Roberto seinen Stammkunden nach diesem Verfahren im Mittel ein?

Lösung

===

1. a) Es gibt $\binom{5}{2} \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 4 = \binom{5}{2} \cdot \frac{12!}{3!} \approx 7{,}98 \cdot 10^8$ verschiedene Möglichkeiten.

b) Es gibt $\binom{12}{5} \cdot 5! \cdot \frac{15!}{8!} \approx 3{,}08 \cdot 10^{12}$ verschiedene Möglichkeiten.

---

2. $p = \frac{72}{2400} = 0{,}03$

a) $P(X=4) = B(48;\, 0{,}03;\, 4) = \binom{48}{4} \cdot 0{,}03^4 \cdot 0{,}97^{44} \approx 4{,}1\%$

b) $P\left(Z \geq 1\right) > 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z = 0\right) < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}959^n < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9587} \approx 54{,}6$

Man muss mindestens 55 Kartons öffnen.

c) Benötigte Ungleichung : $P\left(\left| X-\mu \right| \le \varepsilon \right) > 1-\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

$\mu = E(X) = 72$

$P\left(\left| X-72 \right| \le 12 \right) > 1-\frac{2400\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97}{12^2} \approx 51{,}5\%$

d) Stichprobenlänge : $n = 8\cdot 48 = 384$

Nullhypothese H_0: $p \le p_0 = 0{,}03$

Gegenhypothese H_1 : $p > p_0 = 0{,}03$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{ 0;\ 1;\ 2;\ ....;\ k \right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ k+1;\ ....;\ 388 \right\}$

Bedingung : $\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}} \right) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \le k \right) \ge 0{,}95 \quad \Leftrightarrow$

$\Phi\left(\frac{k-384\cdot 0{,}03+0{,}5}{\sqrt{384\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97}} \right) \ge 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \frac{k-11{,}02}{\sqrt{10{,}6894}} \ge \Phi^{-1}(0{,}95) \quad \Rightarrow \quad \frac{k-11{,}02}{\sqrt{10{,}6894}} \ge 1{,}6449$

$\Rightarrow \quad k \ge 17$

Also ist $\mathbb{A} = \left\{ 0;\ ...;\ 17 \right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ 18;\ ....;\ 384 \right\}$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls mindestens 18 Waffeln der Stichprobe zerbrochen sind.

---

3. a) Es gibt $\frac{(12+2)!}{12!\cdot 2!} = 91$ verschiedene Möglichkeiten.

b) 1. $\left| \Omega \right| = \frac{12!}{8!\cdot 2!\cdot 2!} = 2970$

2. $\left| E \right| = 1$

3. $P(E) = \frac{1}{2970} \approx 0{,}034\%$

---

4. a)

	10%	**10%**	**10%**	**15%**	**15%**	**50%**
10%	10%	10%	10%	15%	0%	0%
10%	10%	10%	10%	15%	0%	0%
10%	10%	10%	10%	15%	0%	0%
15%	15%	15%	15%	15%	0%	0%
15%	0%	0%	0%	0%	15%	50%
50%	0%	0%	0%	0%	50%	50%

a) $P(E) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

b)

x	0%	10%	15%	50%
$P(X = x)$	16/36	9/36	8/36	3/36

$$E(X) = 0\% \cdot \frac{16}{36} + 10\% \cdot \frac{9}{36} + 15\% \cdot \frac{8}{36} + 50\% \cdot \frac{3}{36} = 10\%$$