Stochastik 2007		Aufgabe I

1. In einer Gemeinschaftspraxis von Augenärzten ergab eine mehrjährige Auswertung der Patientenkartei, dass im Durchschnitt jeder 15. Patient an Grauem Star leidet.

   a) Im Laufe eines Vormittags rufen unabhängig voneinander 15 Personen an und bitten um einen Termin. Mit welcher W'keit hat genau eine dieser Personen Grauen Star ?

   b) Wie viele Personen müssen unabhängig voneinander um einen Termin bitten, damit mit einer W'keit von mehr als 90% mindestens einer darunter ist, der an Grauem Star leidet ?

---

2. Der Pharmakonzern Medicash forscht nach einem neuen Medikament. Es stehen 6 verschiedene Wirkstoffe zur Auswahl.

   Im Labor werden Testsubstanzen aus mindestens zwei Wirkstoffen gemischt, wobei von jedem beteiligten Wirkstoff jeweils genau ein Milligramm enthalten sein soll.

   Wie viele verschiedene Wirkstoffkombinationen sind möglich?

---

3. Ein Labor entwickelt einen neuen Impfstoff und testet ihn in einem Tierversuch mit 900 Mäusen. Mit dem Impfstoff werden nur dann klinische Studien durchgeführt, wenn sich dabei in weniger als 2% der Fälle unerwünschte Nebenwirkungen zeigen.

   Bestimmen Sie für die Nullhypothese $H_o : p \geq 2\%$ die Entscheidungsregel für den Test mit 900 Mäusen auf dem Signifikanzniveau von 1%.

   Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

---

4. Ein Anteil $p \in \,]0;1[$ von Patienten leidet an der Infektion durch den M-Virus. Der Nachweis dieser Krankheit durch einen Bluttest ist nicht zuverlässig.

   Falls jemand vom M-Virus befallen ist, dann diagnostiziert der Bluttest dies nur mit einer W'keit von 90%. Falls jemand nicht infiziert ist, dann diagnostiziert der Bluttest in 5% aller Fälle trotzdem eine M-Virusinfektion.

   Zeigen Sie, dass die W'keit, dass eine Person tatsächlich infiziert ist, falls der Bluttest dies diagnostiziert, beträgt $\frac{90p}{85p+5}$.

   Für welche Werte von p ist diese W'keit größer als 90%?

---

5. In einer Spezialklinik hält sich jeder Patient (unabhängig von anderen Patienten) mindestens 3 Tage, höchstens aber 5 Tage auf.

   Die Verwaltung legt für die Aufenthaltsdauer X eines Patienten in Tagen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde:

k	3	4	5
$P(X=k)$	60%	10%	30%

Jeder Patient zahlt für die Aufnahme 110€ Verwaltungsgebühr und 450 € pro Aufenthaltstag.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße

Y: Einnahmen pro Patient (in €).

b) Die Klinik benötigt jährlich mindestens 4,4 Millionen Euro Einnahmen. Mit welcher W'keit wird bei einer jährlichen Belegung von 2500 Patienten mindestens dieser Betrag erreicht ?

Nach dem zentralen Grenzwertsatz kann die Normalverteilung zugrunde gelegt werden.

---

6. Bei einer Bernoulli-Kette der Länge und der Trefferwahrscheinlichkeit p ist die W'keit für genau 2 Treffer maximal, wenn $\mu = p \cdot n = 2$ gilt (Nachweis nicht erforderlich).

a) Zeigen Sie, dass für diese maximale W'keit in Abhängigkeit von n gilt:

$$P(n) = \left(2 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-2}$$

b) Gegen welchen Grenzwert strebt $P(n)$ für $n \to \infty$?

(Hinweis : Der Grenzwert $\lim\limits_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{k}{\nu}\right)^{\nu} = e^k$ für $k \in \mathbb{R}$ darf ohne Nachweis benutzt werden.)

Lösung

===

1. a) $P(X=1) = B(15; \frac{1}{15}; 1) = \binom{15}{1} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^1 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{14} \approx 38{,}1\%$

b) Bedingung : $P(X \geq 1) > 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X=0) > 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad P(X=0) < 0{,}10$

$$\left(\frac{14}{15}\right)^n < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{14}{15}} \quad \Rightarrow \quad n \geq 34$$

---

2. $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 - 1 - 6 = 57$

---

3. Nullhypothese $H_0 : p \geq p_0 = 0{,}02$ Gegenhypothese $H_1 : p < p_0 = 0{,}02$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k+1; ....; 900\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; 1; 2; ....; k\right\}$

Bedingung : $\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}}\right) \leq 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left((X \leq k\right) \leq 0{,}05 \quad \Leftrightarrow$

$$\Phi\left(\frac{k-900\cdot 0{,}02+0{,}5}{\sqrt{900\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\right) \leq 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \frac{k-17{,}5}{\sqrt{17{,}64}} \leq \Phi^{-1}\left(0{,}01\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{k-17{,}5}{\sqrt{17{,}64}} \leq -2{,}3264$$

$\Rightarrow \quad k \leq 8$

$\mathbb{A} = \left\{8; ...; 900\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; 7\right\}$

Entscheidungsregel :

Die Nullhypothese wird angenommen, wenn mindestens 8 Mäuse unerwünschte Nebenwirkungen zeigen.

---

4. Gegeben : $P(M) = p$, $P(I \mid M) = 0{,}9$ und $P(I \mid \overline{M}) = 0{,}05$

$$P(M \mid I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}9p}{0{,}9p+0{,}05\cdot(1-p)} = \frac{90p}{85p+5}$$

Bedingung : $\dfrac{90p}{85p+5} > 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 90p > 76{,}5p + 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 13{,}5p > 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad p > \dfrac{1}{3}$

---

5. a) $E(Y') = 0{,}6\cdot 1350 + 0{,}1\cdot 1800 + 0{,}3\cdot 2250 = 1665 \quad \Rightarrow \quad Y = 1775$

$Var(Y) = 0{,}6\cdot 1350^2 + 0{,}1\cdot 1800^2 + 0{,}3\cdot 2250^2 - 1665^2 = 164025 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 405 \left(€\right)$

b) $P\left(X \geq 4400000\right) = 1 - P\left(X < 4400000\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{4400000 - 2500\cdot 1775}{50\cdot 405}\right) =$

$\approx 1 - \Phi\left(-1{,}85\right) \approx 96{,}8\%$

---

6. a) $p = \dfrac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad P\left(X=2\right) = \binom{n}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-2} = \dfrac{2\cdot(n-1)}{n}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-2} =$

$= \left(2-\dfrac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-2}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} P(n) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(2 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-2} = \left(2 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n} = 2 \cdot e^{-2}$
