Abitur 2007		Infinitesimalrechnung I

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen. Bestimmen Sie die Symmetrieeigenschaft von G_f und zeigen Sie, dass die Geraden mit den Gleichungen $y = -1$ und $y = 1$ Asymptoten von G_f sind.

   b) Zeigen Sie, dass f streng monoton zunehmend ist. Berechnen Sie f(1) sowie f '(0) und skizzieren Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

   c) Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an.

   d) f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}. Geben Sie die Definitionsmenge von f^{-1} an und bestimmen Sie für f^{-1} einen Funktionsterm.

   (Hinweis : Erweitern Sie den Term von f mit e^x.)

$$\left[\text{mögliches Teilergebnis : } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]$$

---

2. Die Fallgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers vor Öffnen des Schirms wird in guter Näherung beschrieben durch den Term

$$v(t) = 50 \cdot f(0{,}2t) = 50 \cdot \frac{e^{-0,2t} - e^{-0,2t}}{e^{-0,2t} + e^{-0,2t}} \text{ mit } t \geq 0.$$

   Dabei ist t die Maßzahl der Fallzeit in Sekunden, v(t) die Maßzahl der Fallgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ und f die Funktion aus Aufgabe 1.

   a) Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und deuten Sie das Ergebnis im genannten Anwendungsbezug.

   b) Berechnen Sie auf eine Dezimale gerundet die Zeit, nach der der Springer eine Geschwindigkeit von 49 $\frac{m}{s}$ erreicht hat.

   (Die Absprunghöhe wird als genügend groß vorausgesetzt.)

   c) Die Maßzahl der in der Zeit 11,5s durchfallenen Strecke (in m) ist gegeben durch

$$\int_0^{11,5} v(t)dt.$$ Berechnen Sie dieses Integral.

---

3. Gegeben ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion h, deren Funktionsgleichung in der Form

   $y = h(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ geschrieben werden kann. g ist hierbei eine Funktion, die mit ihrer zweiten Ableitung übereinstimmt, d. h. es gilt $g''(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist ein Beispiel für eine derartige Funktion h.

   a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt : $h'(x) = 1 - [h(x)]^2$.

   b) Folgern Sie aus der Gleichung von Teilaufgabe 3.a) :

   Verläuft der Graph von h im Streifen $-1 < y < 1$, dann steigt er dort streng monoton.

   Begründen Sie kurz, dass der Graph von h die Gerade $y = 1$ nicht überqueren kann.

Lösung

---

1. a) Nullstellen : $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

   Symmetrie : $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$

   Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems

   Grenzverhalten : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ wegen der Punktsymmetrie

   Also ist $y = 1$ von G_f eine Asymptote für $x \to \infty$

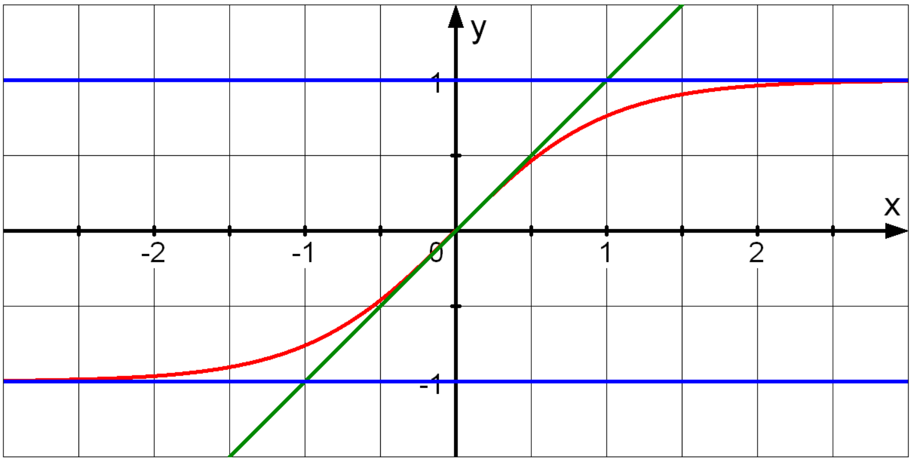
   und

   $y = -1$ eine Asymptote von G_f für $x \to -\infty$

b) $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$

f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.

$f(1) = \dfrac{e-\frac{1}{e}}{e+\frac{1}{e}} = \dfrac{e^2-1}{e^2+1} \approx 0{,}76 \quad f'(0) = 1$



c) $\int \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right| + C$ (logarithmische Integration)

d) $D_{f^{-1}} =]-1;1[$

$y = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow ye^{2x}+y = e^{2x}-1 \Rightarrow ye^{2x}-e^{2x} = -1-y$

$\Rightarrow e^{2x}\cdot(y-1) = 1+y \Rightarrow e^{2x} = \dfrac{-1-y}{1-y} \Rightarrow 2x = \ln\dfrac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$

---

2. a) $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 50\cdot f(0{,}2t) = 50\cdot\lim\limits_{t\to\infty} f(0{,}2t) = 50,$

weil $\lim\limits_{t\to\infty} t = \infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} 0{,}2t = \infty$

Die Geschwindigkeit $v = 50\,\frac{m}{s}$ ist die Grenzgeschwindigkeit, der sich der Fallschirmspringer mit zunehmender Fallzeit immer mehr nähert.

b) $49 = 50 \cdot \frac{e^{0,2t} - e^{-0,2t}}{e^{0,2t} + e^{-0,2t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} = \frac{49}{50}$ mit $x = 0,2t$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,98}{1-0,98} \approx 2,3 \quad \Rightarrow \quad 0,2 \cdot t = 2,3 \quad \Rightarrow \quad t \approx 11,5$

c) $\int v(t)dt = 50 \cdot \int f(0,2t)dt = 250 \cdot \int 0,2 \cdot f(0,2t)dt = 250 \cdot \int x \cdot f(x)dx =$

$= 250 \cdot \ln |e^x + e^{-x}| + C' = 250 \cdot \ln |e^{0,2t} + e^{-0,2t}| + C$

$\int_0^{11,5} v(t)dt = \left[250 \cdot \ln |e^{0,2t} + e^{-0,2t}| \right]_0^{11,5} \approx 404$

Der Springer durchfällt eine Höhe von ca. 404 m.

---

3. a) $h'(x) = \frac{g''(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{g(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = 1 - [h(x)]^2$

b) Es ist $[h(x)]^2 < 1$

Also ist $h'(x) = 1 - [h(x)]^2 > 1 - 1 = 0$

Folglich ist h auf $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.

Der Graph von h schneide die Gerade $y = 1$ an der Stelle x_0.

Gilt in einer Umgebung U von x_0 etwa

$h(x) < 1$ für alle x in U mit $x < x_0$

und

$h(x) > 1$ für alle x in U mit $x > x_0$

dann ist h in U links von x_0 streng monoton steigend und rechts von x_0 streng monoton fallend und damit an der Stelle x_0 einen Hochpunkt.

Widerspruch !
