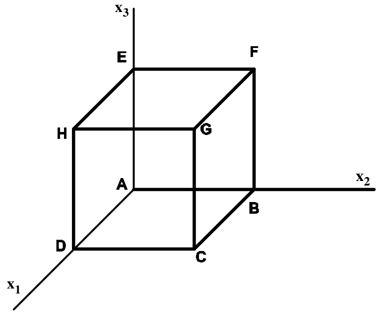


Gegeben ist eine Kugel K mit dem Radius 5, die in eine im Koordinatensystem stehende würfelförmige Schachtel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 10 (siehe Abbildung) verpackt ist, sowie die Punkteschar

$P_a\left(10 \mid 0 \mid \frac{5(a+2)}{a+1}\right)$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}_0^+$.

1. a) Wie viel Prozent des Schachtelvolumens füllt die Kugel aus ?

   b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte Z_1 und Z_2, in denen die Gerade DF die Kugel schneidet.

   $$\left[\text{Zur Kontrolle : } Z_1\left(5+\frac{5}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; 5-\frac{5}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; 5+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)\right]$$

   c) Geben Sie die kürzeste Strecke an, auf der sich der Punkt P_a bewegt, wenn a das Intervall $[0; \infty[$ durchläuft. Begründen Sie Ihre Antwort.

Um diese Verpackung attraktiver zu gestalten, werden durch Ebenen, die senkrecht zu den Raumdiagonalen des Würfels verlaufen, an allen seinen Ecken kongruente dreiseitige Pyramiden abgeschnitten.

2. a) Um welche besonderen Dreiecke handelt es sich bei der Grundfläche (Schnittfläche) und den Seitenflächen der abgeschnittenen Pyramiden?

   b) Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Ebene S_a in Normalenform, die senkrecht zu DF liegt und den Punkt P_a enthält

   $$\left[\text{Mögliches Ergebnis : } x_1 - x_2 + x_3 - - \frac{15a+20}{a+1} = 0\right]$$

---

3. Im Folgenden sei $a = 4$.

   a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Ebene S_4 die Kugel nicht schneidet.

   b) Zeichnen Sie den Würfel, den Punkt P_4 und die Schnittfläche der Ebene S_4 mit dem Würfel in ein Koordinatensystem (Orientierung wie in obiger Abbildung) ein.

c) Berechnen Sie die Volumenverkleinerung der Schachtel und die Oberflächenabnahme der Schachtel, wenn in gleicher Weise wie durch an der Ecke F an allen Würfelecken Pyramiden abgeschnitten werden.

d) Die Ebene S_4 und die drei entsprechenden Ebenen, die die oberen Ecken E, G und H des Würfels abschneiden, haben genau einen Punkt W gemeinsam (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von W.

Lösung

===

1 .a) $\dfrac{\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3}{10^3} \approx 52{,}4\%$

b) Mittelpunkt des Würfels : $\vec{m} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{d} + \vec{f}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} M\left(5 \mid 5 \mid 5\right)$

Einheitvektor in Richtung von $\overrightarrow{DF}$: $\vec{v_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{z_1} = \vec{m} + 5\cdot\vec{v_0}$ und $\vec{z_2} = \vec{m} - 5\cdot\vec{v_0}$

$Z_1\left(5+\frac{5}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; 5-\frac{5}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; 5+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ und $Z_1\left(5-\frac{5}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; 5+\frac{5}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; 5-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$

c) $\dfrac{5\cdot(a+2)}{a+1} = 5 + \dfrac{5}{a+1}$ d. h. die x_3-Koordinate nimmt echt monoton mit a ab.

Der Punkt P_a bewegt sich auf der x_3-Achse von $\left(10 \mid 0 \mid 10\right)$ bis $\left(10 \mid 0 \mid 5\right)$ (wird nicht erreicht).

----

2. a) Grundflächen : Gleichseitige Dreiecke

Seitenflächen : Gleichschenklig, rechtwinklige Dreiecke

b) Ansatz : $x_1 - x_2 + x_3 + n_4 = 0$

Punkt P_a eingesetzt : $10 + \frac{5\cdot(a+2)}{a+1} + n_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_4 = \frac{-15a-20}{a+1} = -\frac{5\cdot(3a+4)}{a+1}$

$S_a : x_1 - x_2 + x_3 - - \frac{15a+20}{a+1} = 0$

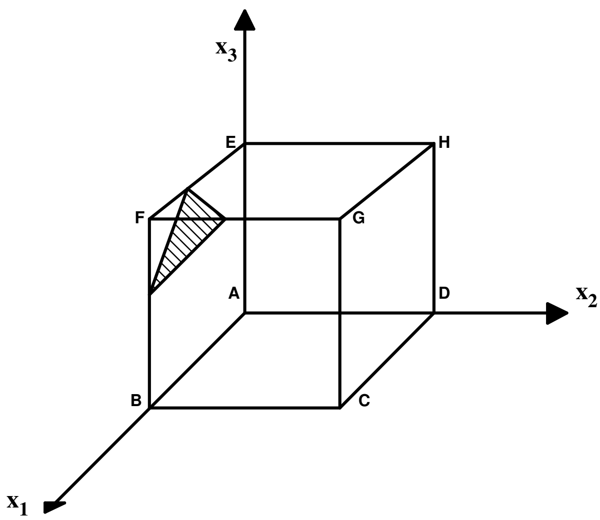
---

3. a) $S_4 : x_1 - x_2 + x_3 - 16 = 0$

$$d(M;\, S_4) = \left| \frac{5-5+5-16}{\sqrt{3}} \right| = \frac{11}{3}\sqrt{3} > 5$$

Die Ebene S_4 schneidet die Kugel nicht.

b) Schnittpunkt von S_4 mit den Würfelkanten : $\left(10\,|\,0\,|\,6\right)$, $\left(6\,|\,0\,|\,10\right)$ und $\left(10\,|\,4\,|\,10\right)$.



c) Volumenabnahme :

$$\Delta V = 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot4\right) = \frac{256}{3}$$

Oberflächenabnahme :

$$\Delta O = 24\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot4 - 8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 192 - 64\sqrt{3} = 64\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)$$

d) Wegen der Symmetrie gilt $w_1 = w_2 = 5$. W liegt auf S_4

$5 - 5 + x_3 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 16 \quad W\left(5\,|\,5\,|\,4\right)$