1. Gegeben ist die Funktion $f : x \to (x-1) \cdot \ln x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   Hinweis : $\lim\limits_{x \to 0+0} \left(x^n \cdot \ln x \right) = 0$, für $n \in \mathbb{N}$, darf ohne Beweis verwendet werden.

   a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge.

   b) Weisen Sie nach, dass an der Stelle $x = 1$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.

   $$\left[\text{Zur Kontrolle : } f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} \right]$$

   c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Berechnen Sie f(3) und skizzieren Sie G_f aufgrund der bisherigen Ergebnisse.

   d) Begründen Sie, dass f im Intervall]0; 1] umkehrbar ist. Geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g an.

   Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0+0} g'(x)$.

   e) G_f und die Koordinatenachsen begrenzen für $x \leq 1$ ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück den endlichen Inhalt 0,75 hat.

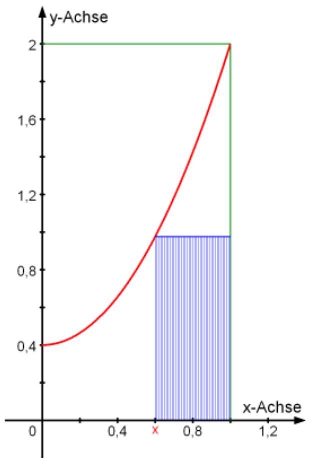
---

2. Aus rechteckigen Kunststoffplatten von 1 Meter Breite und 2 Meter Höhe wurden Stücke abgeschnitten, wobei die Schnittkurve p_t Teil einer Parabel ist, die der Gleichung

   $$y = tx^2 + 2 - t$$

   genügt. Für den Parameter t gilt : $0 < t \leq 2$.

   In nebenstehender Skizze ist der Fall $t = 1{,}6$ dargestellt.



   a) Zeigen Sie, dass jede Schnittkurve durch den Punkt $\left(1 \middle| 2 \right)$ verläuft. Beschreiben Sie die Bewegung des Parabelscheitels, wenn t bei 2 beginnend alle Werte des Intervalls]0;2] durchläuft.

Aus der Restplatte werden Rechtecke - wie in der Skizze schraffiert dargestellt - ausgeschnitten. Je eine Seite des Rechtecks soll auf dem unteren bzw. auf dem rechten Rand der Platte zu liegen kommen, eine Ecke des Rechtecks soll auf der Schnittkurve liegen.

b) Zeigen Sie, dass für den Inhalt eines solchen Rechtecks gilt**:**

$$A_t(x) = -tx^3 + tx^2 + (t-2)x + 2 - t \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Der Inhalt $A_t(x)$ des ausgeschnittenen Rechtecks soll möglichst groß sein (Extremwertproblem).

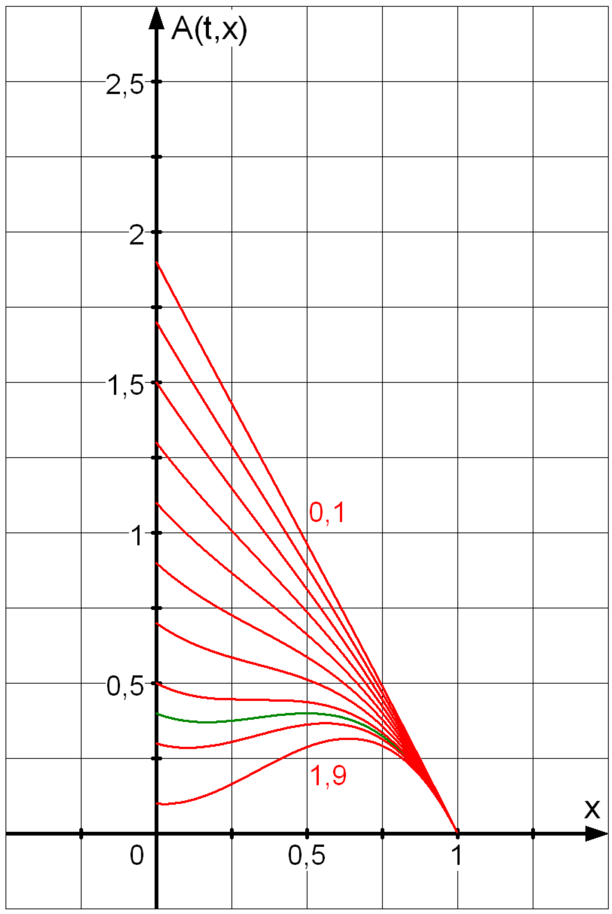
c) Die unten stehende Abbildung zeigt einige Graphen der Scharfunktionen A_t.

Beschreiben Sie, was aufgrund der Abbildung im Fall $0 < t < 1{,}5$ für die Lösung des Extremwertproblems zu vermuten ist.

Beweisen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.

Im Fall $t = 1{,}6$ ist die erste Ableitung von A_t an den Stellen $x = \frac{1}{6}$ und $x = \frac{1}{2}$ gleich Null (Nachweis nicht erforderlich).

Bestätigen Sie durch Berechnung geeigneter Werte von A_t, dass für zwei Rechtecke den maximalen Flächeninhalt aufweisen.



Lösung

===

1. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 0 \vee \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[(x-1)\cdot \ln x\right] = \infty \text{ weil } \lim_{x\to\infty}(x-1) = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left[(x-1)\cdot \ln x\right] = \lim_{x\to 0+0}\left[x\cdot \ln x - \ln x\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} x\cdot \ln x - \lim_{x\to 0+0}\ln x = \infty$$

b) $f\,'x) = 1\cdot \ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$

$$f\,'(1) = \ln 1 + 1 - \frac{1}{1} = 0+1-1 = 0$$

Also besitzt der Graph von f im Punkt $E\left(1;\,0\right)$ eine waagrechte Tangente.

$x > 1 : f\,'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} > 0$, da $\ln x > 0$ und $\frac{1}{x} < 1$

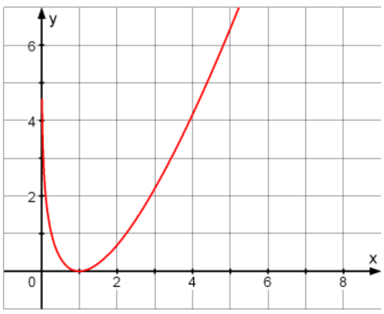
$0 < x < 1 : f\,'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} < 0$, da $\ln x < 0$ und $\frac{1}{x} > 1$

Monotonie :

f ist auf]0; 1] streng monoton abnehmend und auf [1; ∞[streng monoton zunehmend.

c) $f\,''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ für $x > 0$ d.h. G_f ist auf $\mathbb{R}^+$ linksgekrümmt.

$f(3) = (3-1)\cdot \ln 3 = 2\ln 3 \approx 2{,}2$



d) f ist auf]0;1] streng monoton abnehmend und daher umkehrbar.

$D_g = [0;\infty[$ und $W_g =]0;1]$

$$\lim_{x\to 0+0} g'(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

e) $$\int (x-1)\cdot \ln x\,dx = (\frac{x^2}{2} - x)\cdot \ln x - \int (\frac{x^2}{2} - x)\cdot \frac{1}{x}dx = (\frac{x^2}{2} - x)\cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + x =$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} - x\right)\cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + x + C$$

$$A(a) = \int_a^1 f(x)dx = \left[(\frac{x^2}{4} - x)\cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + x\right]_a^1 = -\frac{1}{4} + 1 - \left[(\frac{a^2}{4} - a)\cdot \ln a - \frac{a^2}{4} + a\right] =$$

$$= \frac{3}{4} - \left[(\frac{a^2}{4} - a)\cdot \ln a - \frac{a^2}{4} + a\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0+0} A(a) = \frac{3}{4}$$

---

2. a) Einsetzen von $x = 1$ ergibt $y = t\cdot 1^2 + 2 - t = 2$ unabhängig von t.

Der Scheitel bewegt sich von $(0;\,2)$ auf der y-Achse beliebig nahe auf $(0;\,0)$ zu.

b) Länge des Rechtecks : $1 - x$ Höhe des Rechtecks : $p_t(x)$

$$A_t(x) = (1-x)\cdot(tx^2 + 2 - t) = -tx^3 + tx^2 + (t-2)x + 2 - t$$

c) Für $0 < t < 1{,}5$ erhält man ein Rechteck mit maximalen Flächeninhalt für $x = 0$.

Begründung :

$$A_t'(x) = -3tx^2 + 2tx + t - 2 = 0$$

$$D = 4t^2 + 12t^2 - 24t = 16t^2 - 24t = 8t\cdot(2t-3) < 0 \text{ falls } 0 < t < 1{,}5$$

Also $A_t(x)$ besitzt für $0 < t < 1{,}5$ in $]0;1[$ keinen Extremwert.

d) $A_{1,6}(0) = 0{,}4$ $A_{1,6}(\frac{1}{6}) \approx 0{,}34 < 0{,}4$ $A_{1,6}(\frac{1}{2}) = 0{,}4$
