Gegeben ist die Ebenenschar $Z_a: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $D(-2 \mid 0 \mid 2)$ und

$\lambda, \tau, a \in \mathbb{R}$

1. a) Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.

b) Zeigen Sie, dass

$$Z_a : (4a-10)\cdot x_1 - (2a+4)\cdot x_2 + (5a-8)\cdot x_3 + 18a - 36 = 0$$

eine weitere mögliche Gleichung für die Ebenenschar Z_a ist.

c) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Scharebene senkrecht auf der Scharebene Z_1 steht.

d) Zeigen Sie, dass die Scharebene Z_2 eine winkelhalbierende Ebene der beiden zueinander senkrechten Scharebenen Z_1 und Z_4 ist.

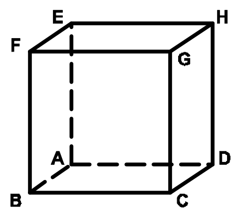
---

2. Der Punkt $M(-1 \mid 1 \mid 3)$ ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $3\sqrt{3}$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt D auf dieser Kugel liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Kugelpunkts F, für den $[FD]$ ein Durchmesser der Kugel ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kugelpunkte, die auf der Geraden g liegen.

c) Berechnen Sie die Längen $\overline{DH}$ und $\overline{HF}$ und begründen Sie, dass man die drei Punkte D, F und H zu einem Würfel ABCDEFGH wie in der Abbildung ergänzen kann.



d) Zeigen Sie, dass das Dreieck DHF in der Ebene Z_2 liegt. Begründen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, warum die Ebenen Z_1 und Z_4 je eine Würfelfläche enthalten.

e) Der Eckpunkt G liegt in Z_4 (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von G.

Lösung

===

1. a) Gleichung der gemeinsamen Geraden g : g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Normalenvektor einer Scharebene : $\vec{n_{Z_a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+4a \\ -2a-4 \\ 5a-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a-10 \\ -2a-4 \\ 5a-8 \end{pmatrix}$

Normalenform G_a : $\begin{pmatrix} 4a-10 \\ -2a-4 \\ 5a-8 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (4a-10)\cdot x_1 - (2a+4)\cdot x_2 + (5a-8)\cdot x_3 + 18a - 36 = 0$

c) Bedingung : $\vec{n_{Z_1}} \cdot \vec{n_{Z_A}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4a-10 \\ -2a-4 \\ 5a-8 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 8a - 20 - 4a - 8 + 5a - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$

Die Ebene Z_4 steht auf Z_1 senkrecht.

d) Einfache Normalenvektoren von Z_1 und Z_4 :

$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot \vec{n_1} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n_2}$

Skalarprodukt und Beträge dieser Vektoren : $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 9 \quad \left| \vec{n_1} \right| = 3 \quad \left| \vec{n_2} \right| = 3\sqrt{3}$

Winkel zwischen Z_1 und Z_2 : $\cos\varphi = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45°$

Die Scharebene Z_2 ist eine winkelhalbierende Ebene zu Z_1 und Z_4.

---

2. a) $\vec{MD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{MD} = \sqrt{1+1+25} = 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad D \in K\left(M; r = 3\sqrt{3} \right)$

$$\overrightarrow{m} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{d}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f} = 2\cdot\overrightarrow{m} - \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Allgemeiner Geradenpunkt : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2+2\mu \\ -\mu \\ -2-2\mu \end{pmatrix}$

Radialvektor : $\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} -1+2\mu \\ -1-\mu \\ -5-2\mu \end{pmatrix}$

Bedingung : $(-1+2\mu)^2+(-1-\mu)^2+(-5-2\mu)^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -2 \vee \mu = 0$

Eingesetzt ergibt sich $D\left(-2 \mid 0 \mid -2\right)$ und $H\left(-6 \mid 2 \mid 2\right)$

c) $\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{DH} = 6 \quad \overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{HF} = 6\sqrt{2} \quad \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{HF} = 0$

Die Punkte D, F und H lassen sich wie in der Abbildung zu einem Würfel ergänzen, weil HF $\perp$ DH und $\overline{HF}$ die Länge der Diagonale eines Quadrate mit der Seitenlänge 6 ist.

d) Einsetzen des Punktes F in Z_2 ergibt $F \in Z_2$.

Z_1 und Z_4 gehen durch DH und Z_2 geht durch F und halbiert den Winkel zwischen den beiden Ebenen. Also enthalten diese Ebenen AE bzw. CG.

e) G ist der Schnittpunkt der Lotgeraden zu Z_2 durch den Mittelpunkt von $\left[FH\right]$ mit Z_4

Lotgerade : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalengleichung von Z_4 : $6x_1 - 12x_2 + 12x_3 + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$

Eingesetzt $(-3+\sigma) - 2\cdot(2+4\sigma) + 2\cdot(5-\sigma) + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -9\sigma + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = 1$

Eingesetzt ergibt sich $G\left(-2 \mid 6 \mid 4\right)$