Abitur 2005		Infinitesimalrechnung I

1. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

   $f_k : x \rightarrow (x^2 + 1 - k) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

   Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

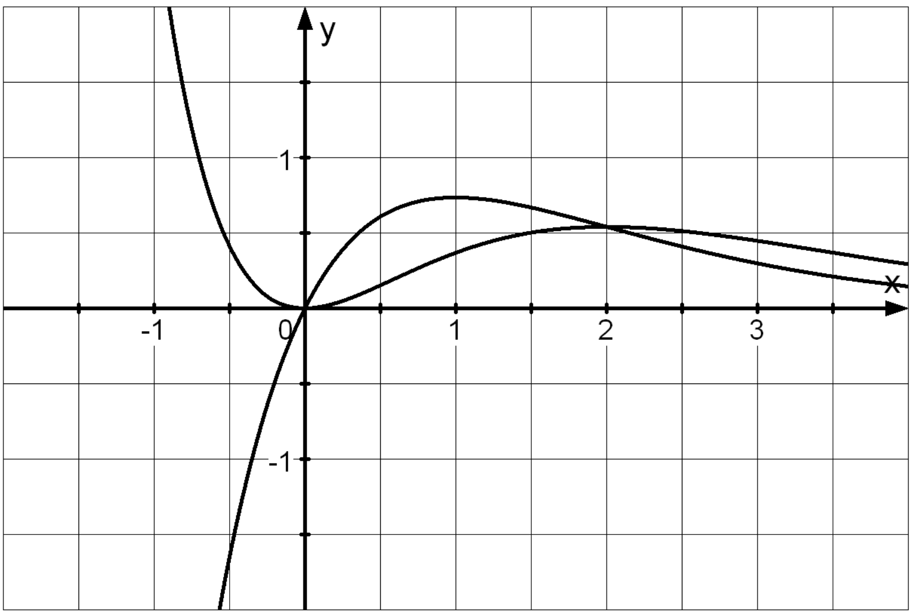
   a) Untersuchen Sie auf Nullstellen in Abhängigkeit von k. Bestimmen Sie das Verhalten von f_k für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

   b) Zeigen Sie, dass sich je zwei verschiedene Graphen G_k nicht schneiden, einander aber beliebig nahe kommen.

   c) Für welche Werte von k besitzt mindestens eine waagrechte Tangente ?

   Zeigen Sie, dass die Punkte von G_k mit waagrechter Tangente auf dem Graphen W der Funktion $w : x \rightarrow 2xe^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegen.

   d) Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen G_1 und W. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_2 in die Abbildung ein.



   e) Bestätigen Sie, dass für $k \in \mathbb{R}$ gilt : $f_k(x) = w(x) - f_k'(x)$

   Der Graph begrenzt im ersten Quadranten mit der x-Achse ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück mit endlichem Inhalt.

   Berechnen Sie diesen Flächeninhalt mit Hilfe der obigen Beziehung.

---

2. In einer Fachzeitschrift war zu lesen :

"Am oder um den 12. Oktober 1999 hat die Weltbevölkerung die Grenze von sechs Milliarden Menschen überschritten.
Zu Beginn des Jahres 2003 lebten bereits 6,274 Milliarden Erdenbürger. Im Jahr 2003 wurden im weltweiten Durchschnitt auf tausend Menschen, die zu Jahresbeginn lebten, 22 Geburten und 9 Todesfälle gezählt."

a) Wie viele Kinder wurden 2003 im Durchschnitt näherungsweise pro Minute geboren ?
Wie viele Milliarden Menschen lebten zu Beginn des Jahres 2004 ?

b) Sollte sich die Bevölkerungsentwicklung von 2003 in Zukunft nicht ändern, so ließe sich die Anzahl N(j) der Erdenbürger zu Beginn des Jahres j nach der Formel

$$N(j) = N(2003)\cdot a^{j-2003}$$

berechnen. Bestimmen Sie a und das Kalenderjahr, in dem die Zahl von neun Milliarden Menschen überschritten würde.

c) Bilden Sie die Ableitung der Funktion . Welcher Zusammenhang besteht zwischen N(j) und N'(j)?

Lösung

==

1. a) Nullstellen :

$$f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1-k)\cdot e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = k-1$$

Fallunterscheidung :

A $k<1$: Keine Nullstelle

B $k=1$: Eine Nullstelle : $x = 0$

C $k>1$: Zwei Nullstellen : $x = -\sqrt{k-1} \lor x = \sqrt{k+1}$

Grenzverhalten :

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-k}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+1-k)e^{-x} = \infty \text{ da } \lim_{x\to-\infty} (x^2+1-k) = \infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$$

b) Schnittpunkte : $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1-k_1)\cdot e^{-x} = (x^2+1-k_2)\cdot e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2$

$$\lim_{x \to \infty} [f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)] = \lim_{x \to \infty} \frac{k_2 - k_1}{e^x} = 0$$

c) $f_k'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2 + 1 - k) \cdot e^{-x} = (x^2 + 2x + 1 - k) \cdot e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = k$

Für nichtnegative Werte von k besitzt G_k waagrechte Tangenten für

$x = 1 - \sqrt{k} \vee x = 1 + \sqrt{k}$

$f_k(1 - \sqrt{k}) = [(1 - \sqrt{k})^2 + 1 - k) \cdot e^{-1-\sqrt{k}} = (2 - 2\sqrt{k}) \cdot e^{-1-\sqrt{k}}$

Analog erhält man

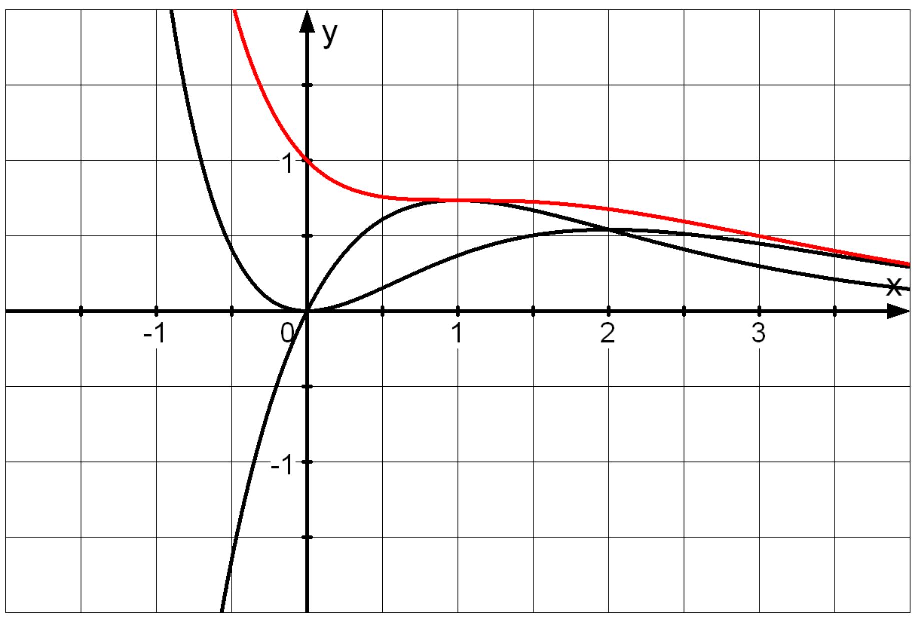
$f_k(1 + \sqrt{k}) = [(1 + \sqrt{k})^2 + 1 - k) \cdot e^{-1-\sqrt{k}} = (2 + 2\sqrt{k}) \cdot e^{-1-\sqrt{k}}$

$E_1\left(-1 + \sqrt{k}; (2 - 2\sqrt{k}) \cdot e^{-1+\sqrt{k}}\right)$ und $E_1\left(-1 + \sqrt{k}; (2 + 2\sqrt{k}) \cdot e^{-1-\sqrt{k}}\right)$

sind Punkte auf G_k mit waagrechten Tangenten.

Einsetzen in $w(x) = 2xe^{-x}$ ergibt die Behauptung.

d)



e) $w(x) - f_k'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + 2x + 1 - k) \cdot e^{-x} = (x^2 + k - 1) \cdot e^{-x}$

$$A(a) = \int_0^a f_1(x)dx = \int_0^a [w(x) - f_0'(x)]dx = \int_0^a w(x)dx - \int_0^a f_0'(x)dx$$

$$\int w(x)dx = \int 2xe^{-x}dx = -2xe^{x} + \int 2e^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$\int f_1'(x)dx = f_1(x) + C$$

$$A(a) = \left[-2xe^{-x} - 2e^{-x} - x^2e^{-x}\right]_0^a = \left[-(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}\right]_0^a = 2 - (a^2+2a+2)\cdot e^{-a}$$

$$\lim_{a \to \infty} A(a) = 2$$

2\. a) $\dfrac{6{,}274\cdot 10^9}{1000\cdot 365\cdot 24\cdot 60}\cdot 22 \approx 263$

$$6{,}274\cdot 10^9 + 6{,}274\cdot 10^6\cdot 13 = (6274 + 13\cdot 6{,}274)\cdot 10^6 = 6{,}356\cdot 10^9$$

b) $a = \dfrac{6356}{6274} \approx 1{,}013$

$$9 = 6{,}274\cdot 1{,}013^{j-2003} \quad \Rightarrow \quad j = 2003 + \frac{\ln\frac{9}{6{,}274}}{\ln 1{,}013} \approx 2031$$

c) $N(j) = N(2003)\cdot a^{j-2003} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{N(j)}{N(2003)} = a^{j-2003} \quad \Rightarrow \quad \ln\dfrac{N(j)}{N(2003)} = (j-2003)\cdot \ln a$

$$\Rightarrow \quad N(j) = N(2003)\cdot e^{(j-2003)\cdot \ln a}$$

$$N(j)' = N(2003)\cdot e^{(j-2003)\cdot \ln a}\cdot \ln a$$

N(j) und N'(j) sind direkt proportional zueinander.
