Abitur 2003		Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$A(5 \mid 0 \mid 1)$, $B(0 \mid 4 \mid 2)$ und $C(0 \mid 0 \mid t)$

mit $0 < t < 6$ gegeben.

1. a) Berechnen Sie für die Gerade AB den Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene sowie ihren Abstand d zur x_3-Achse.

   b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht kleiner als 10 ist.

   c) Untersuchen Sie, für welche der zulässigen Werte von t das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Ferner ist der Punkt $S(0 \mid 0 \mid 6)$ gegeben.

A', B' , C' sind die Spurpunkte der GeradenSA, SB, SC in der Koordinatenebene $x_3 = 0$.

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A', B' , C'.

   b) Legen Sie ein Koordinatensystem an (ganze Seite, Querformat; Koordinatenursprung in der Blattmitte).

   Tragen Sie darin die Pyramide AA'B'C'S und das Dreieck ABC für $t = 3$ ein.

   c) Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene ABC für $t = 3$ mit der x_1x_2-Ebene bildet.

   d) Ermitteln Sie den Wert von t, für den das Dreieck ABC die Pyramide A'B'C'S in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

---

3. Der Schnittpunkt von AB mit A'B' heißt P, der von AC mit A'C' bzw. BC mit B'C' heißt Q_t bzw. R_t $(t \neq 1, t \neq 2)$.

   a) Bringen Sie für $t = 3$ die genannten Geraden in Ihrer Zeichnung zum Schnitt.

   b) In Ihrer Zeichnung sollten P, Q_3, R_3 auf einer Geraden liegen.

   Warum liegen die Punkte P, Q_t, R_t stets auf einer Geraden s_t ?

   (Begründung ohne Rechnung genügt.)

   Beschreiben Sie, welcher besonderen Lage sich die Geraden s_t für $t \to 1$ bzw. für $t \to 2$ nähern und geben Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Grenzgeraden an.

Lösung

==

1\. a) Gerade AB : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene

Bedingung : $x_3 = 1 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1$

Eingesetzt : $S_{x_1x_2}\left(10 \mid -4 \mid 0\right)$

Richtungsvektoren : $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{OA} = \vec{a} - \vec{o} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{20}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 0^2}} = \frac{20}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternativ :

Man legt durch AB eine Ebene parallel zur x_3 – Achse und bestimmt den Abstand des Koordinatenursprungs von dieser Ebene.

E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Normalenvektor

Normalenform von E :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1 - 5x_2 - 20 = 0$$

$$d = \left| \frac{4 \cdot 0 - 5 \cdot - 20}{\sqrt{41}} \right| = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

Alternativ :

Man bestimmt die gemeinsame Lotstrecke zwischen der x_3-Achse und der Geraden AB

Allgemeiner Geradenpunkt auf AB : $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 - 5\lambda \\ 4\lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix}$

Punkt auf der x_3-Achse : $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 5 - 5\lambda \\ 4\lambda \\ 1 + \lambda - \mu \end{pmatrix}$

Orthogonalitätsbedingungen :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 5 - 5\lambda \\ 4\lambda \\ 1 + \lambda - \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 42\lambda - \mu - 24 = 0$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 5 - 5\lambda \\ 4\lambda \\ 1 + \lambda - \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda - \mu + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{25}{41} \quad \mu = \frac{66}{41} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 80/41 \\ 100/41 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{QP} = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

b) C liegt auf der x_3 – Achse. Also ergibt sich als minimaler Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$\mathfrak{I}_{min} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{41}\cdot 20 = 10$$

c) Seitenvektoren : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2-t \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 18$ aber $t < 6$ vorausgesetzt.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \vee t = 2$

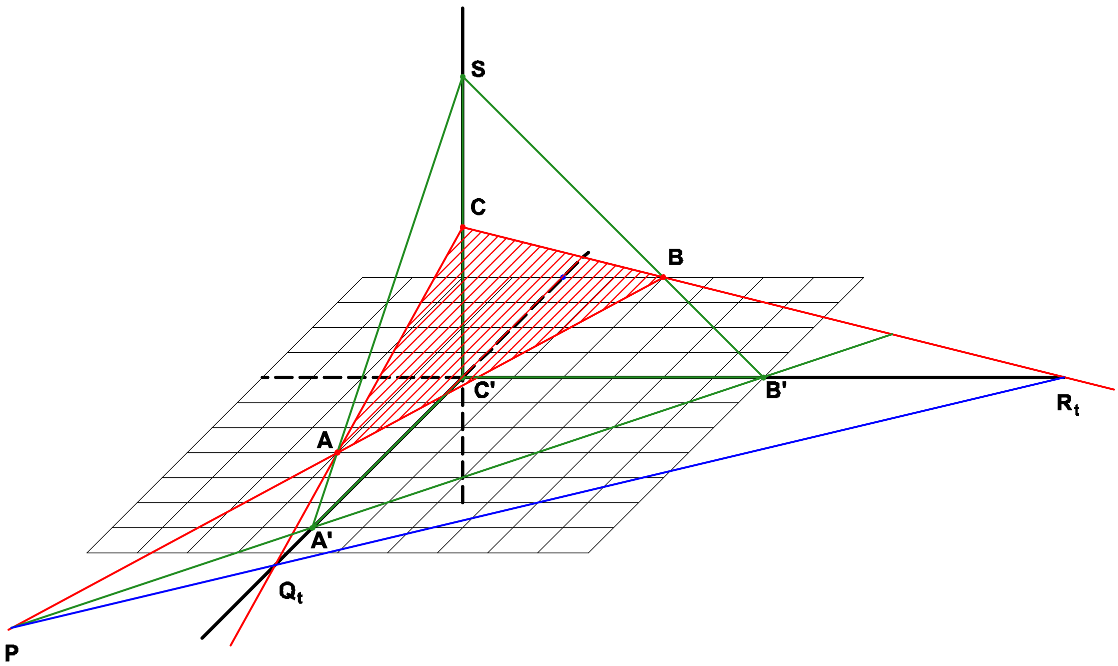
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -24$ aber $t > 0$ vorausgesetzt.

Für $t = 1$ oder $t = 2$ ergibt sich bei C ein rechter Winkel.

---

2. a) SA : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $A'(6\,|\,0|\,0)$ SB : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $B'(0\,|\,6\;0)$

SC : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t-6 \end{pmatrix}$ $C'(0\,|\,0|\,0)$



c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ für t = 3

Normalenvektor : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -20 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \left| \frac{-20}{\sqrt{64+25+400}} \right| = \frac{20}{\sqrt{489}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 25{,}25°$$

d) Volumen der Pyramide A'B'C'S : $\mathfrak{V}_{A'B'C'S} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$

$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{xSC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t-6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & t-6 \end{vmatrix} = 20 \cdot (t-6)$$

Bedingung : $\frac{1}{6} \cdot \left| 20 \cdot (t-6) \right| = 36 \quad \Rightarrow \quad -\frac{10}{3} \cdot (t-6) = 36 \quad \Rightarrow \quad 0{,}6$

---

3. a) s. Zeichnung

b) Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene. A', B' und C' liegen in der x_1x_2-Ebene.

Also liegen die Punkte P, Q_t und R_t auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
