Abitur 2003		Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene

$H: x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$

sowie die Schar von Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 2 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden g_a parallel und keine senkrecht zur Ebene H verläuft.

b) Welche dieser Geraden schneidet H unter dem größten Winkel ?

Berechnen Sie diesen maximalen Winkel auf eine Dezimale genau.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S_a von g_a mit H.

d) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ derjenige Punkt aus der Schar der Schnittpunkte S_a ist, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat.

Geben Sie diese Entfernung an.

e) Die Punkte S_a bilden in H eine Kurve. Diese wird parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene projiziert; die Projektion heißt P.

Fertigen Sie eine Zeichnung von P in der x_1x_2-Ebene an.

Um welchen Kurventyp handelt es sich bei P vermutlich ?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie eine Koordinatengleichung von P aufstellen.

---

2. Ferner sind die Punkte $A(1 \mid 6 \mid 1)$ und $B(-2 \mid 9 \mid 1)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Punkte A und B zu einem regulären Sechseck ABCDEF mit dem Mittelpunkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ ergänzen lassen.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Ergänzungspunkte C und D.

b) Das Sechseck ABCDEF rotiert nun um die Achse AD.

Beschreiben Sie das Aussehen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

Ermitteln Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die den Rotationskörper enthält.

Liegt der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb dieses Rotationskörpers ? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

1. a) $\begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt einen Widerspruch. Also ist kein g_a senkrecht zu H.

$\begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$. Also ist kein g_a parallel zu H.

b) Es ist $\sin\varphi = \left| \dfrac{8}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9a^2+9a^2+64}} \right|$. Also ist φ maximal für $a = 0$.

Dann ist $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Also $\varphi \approx 35{,}3°$

b) g_a in H : $a^2+3a\cdot\lambda-3a\cdot\lambda-a^2+8\cdot\lambda-8 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 1$

$\lambda = 1$ in g_a eingesetzt ergibt $S_a\left(a^2+3a \mid -3a \mid 8-a^2\right)$

d) Der Abstand ist minimal,wenn das Abstandquadrat minimal ist.

$$q = \overline{OS_a}^2 = (a^2+3a)^2+9a^2+(8-a^2)^2$$

$$\frac{dq}{da} = 2\cdot\left(a^2+3a\right)\cdot(2a+3)+18a+2\cdot\left(8-a^2\right)\cdot(-2a) =$$

$$= 2a\cdot(4a^2+9a+2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = -\frac{1}{4} \lor a = -2 \lor a = 0$$

$$\Rightarrow\quad a = -2 \lor a = 0 \lor a = -\frac{1}{4}$$

Wegen

$$\lim_{a\to\infty} q = \lim_{a\to-\infty} q = \infty$$

muss q an einer dieser drei Stellen ein absolutes Minimum besitzen.

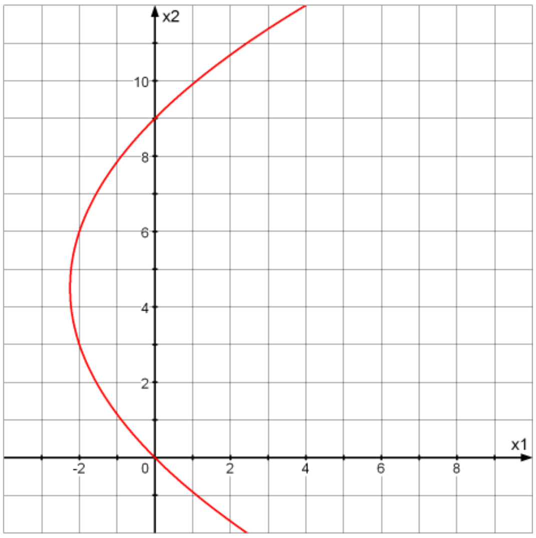
a	-2	0	$-0{,}25$

q	56	64	64,....
$d = \sqrt{q}$	$\sqrt{56}$	8	>8

$S_{-2}\left(-2 \mid 6 \mid 4\right)$ hat vom Ursprung den geringsten Abstand.

e) $S_a'\left(a^2+3a \mid -3a \mid 0\right)$

$$x_2 = -3a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{x_2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{9}x_2{}^2 - x_2$$

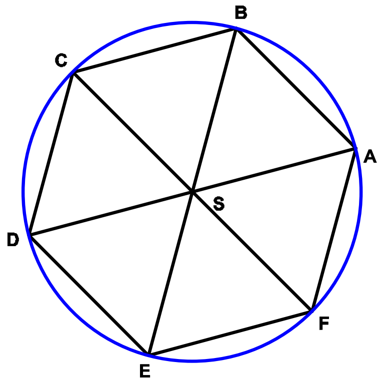


---

2. a) $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -33 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{SA} = \overline{SB} = 3\sqrt{2}$

$$\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}\right) = \left|\frac{9}{18}\right| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}\right) = 60^\circ$$

Also kann man die Punkte A und B zu einem regelmäßigen Sechseck mit dem Mittelpunkt S ergänzen.



$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C\left(-5\,|\,9\,|\,4\right)$$

$$\vec{d} = \vec{s} + \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad D\left(-5\,|\,6\,|\,7\right)$$

b) Der Rotationskörper besteht aus einem Zylinder mit zwei aufgesetzten Kegeln.

Gleichung der kleinsten Kugel, die den Körper enthält :

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 6)^2 + (x_3 - 4)^2 = 18$$

$$\overline{OS} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} > 3\sqrt{2}$$

Der Ursprung liegt außerhalb des Rotationskörpers.