Abitur 2003		Stochastik II

1. Im Januar 2002 war in einer Zeitung zu lesen, dass die neuen Euro-Münzen keine Laplace-Münzen seien. Bei einem Experiment mit einer 2-Euro-Münze, die man 1000-mal auf dem Tisch kreiseln ließ, sei 600-mal Zahl oben liegen geblieben.

   a) Zeigen Sie, dass bereits bei 200 Würfen einer Laplace-Münze die W'keit dafür, dass in wenigstens 60 % der Fälle Zahl oben liegen bleibt, kleiner als 0,5 % ist.

   b) Begründen Sie, dass die Stabdiagramme der Binomialverteilungen mit $p = 0{,}5$ achsensymmetrisch sind. Geben Sie die Symmetrieachse an.

   c) Ermitteln Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow eine möglichst kleine obere Schranke für die W'keit, bei 1000 Würfen einer Laplace-Münze wenigstens 600-mal Zahl zu erhalten.

   Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1a und nehmen Sie dazu kurz Stellung.

   d) Aufgrund des Zeitungsartikels führte ein Schüler eine eigene Versuchsreihe durch. Er ließ eine 2-Euro-Münze 250-mal auf dem Tisch kreiseln; dabei blieb 139-mal Zahl oben.

   Stellen Sie durch Näherung mit der Normalverteilung fest, ob dieses Ergebnis auf einem Niveau von 5 % signifikant dafür ist, dass bei dieser Münze häufiger Zahl oben liegen bleibt als bei einer Laplace-Münze.

---

2. Auf dem Schulfest des Laplace-Gymnasiums wurde untersucht, welchen Einfluss es hat, ob eine 2-Euro-Münze geworfen oder auf dem Tisch gekreiselt wird.

   Jeder Schüler durfte selbst entscheiden, ob er lieber werfen oder kreiseln wollte. In der Schülerzeitung war anschließend Folgendes zu lesen:

   70 % der Schüler kreiselten die Münze. Insgesamt ist in 56 % aller Fälle Zahl oben liegen geblieben, wobei davon 72,5 % durch Kreiseln erzielt worden sind.

   Wie groß ist die relative Häufigkeit des Ereignisses „Zahl liegt oben" beim Werfen und wie groß ist sie beim Kreiseln ?

---

3. Eine Laplace-Münze wird so oft geworfen, bis zweimal hintereinander die gleiche Seite oben liegen bleibt. Insgesamt wird aber höchstens n-mal geworfen.

   Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe, $E_n(X)$sei ihr Erwartungswert.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Werfen immer abwechselnd beide Seiten zu erhalten?

   b) Bestimmen Sie $E_2(X)$, $E_3(X)$ und $E_4(X)$.

c) Zeigen Sie, dass gilt : $E_{n+1}(X) - E_n(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d) Erläutern Sie, warum für $n \to \infty$ nicht größer als 3 wird, und interpretieren Sie diese Tatsache im vorliegenden Zufallsexperiment.

Lösung

==

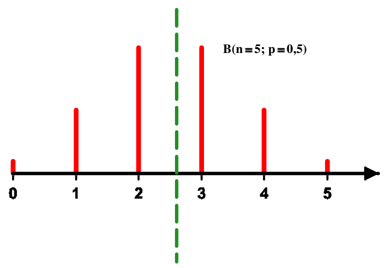
1. a) $P\left(X \geq 120\right) = 1 - P\left(X \leq 119\right) = 1 - F_{0,5}^{200}\left(119\right) = 1 - 0{,}99716 \approx 0{,}3\%$

b) $B(n;\ p;\ k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot (1-0{,}5)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^n$

$B(n;\ p;\ n-k) = \binom{n}{n-k} \cdot 0{,}5^{n-k} \cdot (1-0{,}5)^k = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^n$

$\Rightarrow \quad B(n;\ p;\ k) = B(n;\ p;\ n-k)$

Das Stabdiagramm einer Binoialverteilung mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ ist zu $k = \frac{n}{2}$ achsensymmetrisch.



c) Benötigte Ungleichung $P\left(\left|X - E(X)\right| \geq k\right) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$

mit $E(X) = 1000 \cdot 0{,}5 = 500$ und $Var(X) = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 250$

Eingesetzt ergibt sich : $\frac{250}{100^2} = 2{,}5\%$

Eine obere Schranke ist 1,25%

d) Nullhypothese H_0: $p = p_0 = 0{,}5$

Gegenhypothese $H_1 : p > p_0 = 0{,}5$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{ 0; ...; k \right\}$

Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ k+1; ....; 200 \right\}$

Bedingung :

$$\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}} \right) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \ge k+1 \right) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \le k+1 \right) \ge 0{,}95$$

Rechnung :

$$\Phi\left(\frac{k - 0{,}5 \cdot 250 + 0{,}5}{\sqrt{250 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) \ge 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 125{,}5}{\sqrt{62{,}5}} \ge \Phi^{-1}\left(0{,}95 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k - 124{,}5}{\sqrt{62{,}5}} \ge 1{,}6449 \quad \Rightarrow \quad k \ge 139$$

Ergebnis : $\mathbb{A} = \left\{ 0; ...; 137 \right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ 139; ....; 200 \right\}$

Die Nullhypothese kann abgelehnt werden.

2.

	Z	$\overline{Z}$	
K	0,435	0,265	0,7
$\overline{K}$	0,125	0,175	0,3
	0,56	0,44	

Relative Häufigkeit beim Kreiseln : 62,1%

Relative Häufigkeit beim Werfen : 41,7%

---

3. a) Es sind die Wurffolgen

K - Z- K - Z -..... bzw. Z - K - Z - K - .... möglich. Also

$$P\left(E \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

b) $n = 2 : \Omega = \left\{ KK, KZ, ZK, ZZ \right\}$

x	2
P(X = x)	1

$$E_2\left(X\right) = 1 \cdot 2 = 2$$

$n = 3 : \Omega = \left\{ KK, ZZ, ZKK, KZZ, ZKZ, KZK \right\}$

x	2	3
P(X = x)	0,5	0,5

$$E_3\left(X\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2{,}5$$

$n = 4 : \Omega = \left\{ KK, ZZ, ZKK, KZZ, ZKZZ, KZKK, KZKZ, ZKZK \right\}$

x	2	3	4
P(X = x)	0,5	0,25	0,25

$$E_4\left(X\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 2{,}75$$

c) Es ist

$$E_n(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + ... + (n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + n \cdot \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$E_{n+1}(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + ... + (n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + (n+1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1}(X) - E_n(X) = n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + (n+1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} - n \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{n+n+1-2n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

d) $E_{n+2}(X) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 2 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}})$

Setzt man $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$, dann ist $\frac{1}{2} \cdot s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$.

Subtraktion ergibt

$$s_n - \frac{1}{2} \cdot s_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Also $E_n(X) < 3$ mit $n \geq 2$.

Egal wie oft man wirft, man muss im Mittel die Münze nicht mehr als dreimal werfen.