Abitur 2002		Stochastik I

1. Philipp meldet sich im Internet erstmalig bei der Firma Booky an. Als Passwort wählt er aus Sicherheitsgründen eine zufällige Anordnung der 7Großbuchstaben seines Vornamens.

   a) Wie groß ist die W'keit dafür, dass er das Passwort PPPIIHL wählt ?

   b) Wie groß ist die W'keit dafür, dass in seinem Passwort die beiden Buchstaben I nicht direkt hintereinander auftreten ?

---

2. Anlässlich eines Jubiläums lädt die Firma Booky 300 Personen, von denen 100 bereits Booky-Kunden sind, zu einem Fest ein.

   Unter den Gästen werden im Laufe des Abends Preise verlost. Die Auswahl der Gewinner erfolgt dabei durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne den Namen der 300 Gäste.

   a) Wie viele Preise müssen mindestens verlost werden, damit mit ein W'keit von mehr als 98 % wenigstens einer der Booky Kunden einen Preis erhält ?

   b) Mit welcher W'keit geht von 10 verlosten Preisen nur der letzte an einen Booky-Kunden ?

   c) Mit welcher W'keit gehen die ersten 5 Preise an 5 verschiedene Gäste ?

---

3. Die Geschäftsleitung von Booky interessiert sich für den Bekanntheitsgrad ihres Firmennamens.

   Die W'keit dafür, dass sich die relative Häufigkeit der Befragten, die Booky kennen, um weniger als 0,05 vom tatsächlichen Bekanntheitsgrad unterscheidet, soll mindestens 95% betragen.

   Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab, wie viele Personen dafür mindestens befragt werden müssen.

---

4. Die Firma Booky will eine Fernsehwerbung starten, wenn ihr Bekanntheitsgrad unter 60% liegt. Die Entscheidung soll auf der Grundlage einer Umfrage unter 1200 zufällig ausgewählten Personen getroffen werden.

   Benützen Sie zur Berechnung die Normalverteilung als Näherung.

   a) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel mit einem möglichst kleinen Annahmebereich für die Einleitung der Werbekampagne, bei der die W'keit dafür, dass die Werbekampagne irrtümlich unterlassen wird, höchstens 5 % ist.

   b) Mit welcher W'keit wird nach der Entscheidungsregel von Teilaufgabe 4. a) die Werbekampagne eingeleitet, obwohl der Bekanntheitsgrad bei 65 % liegt ?

---

5. Die Standard-Normalverteilung wird durch die Funktion $\Phi : x \to \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$

beschrieben, wobei $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ $(t \in \mathbb{R})$ ist.

a) Erläutern Sie die stochastische Bedeutung des Funktionswertes $\Phi(x)$ und begründen Sie damit, dass

$\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$ (ist.

b) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Symmetrieeigenschaft von φ dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Lösung

===

1. a) $P(A) = \frac{1}{\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}} = \frac{1}{420} \approx 0{,}24\%$ b) $P(B) = \frac{\frac{5!}{3!} \cdot \binom{6}{2}}{420} = \frac{5}{5} \approx 71{,}43\%$

---

2. a) $P\left(X \geq 1\right) > 0{,}98 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P\left(X = 0\right) > 0{,}98 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X = 0\right) < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow$

$B\left(n;\ \frac{1}{3};\ 0\right) < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}02}{\ln \frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 10$

Es müssen mindestens 10 Preise verlost werden.

b) $P(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{512}{59045} \approx 0{,}87\%$

c) $\frac{300}{300} \cdot \frac{299}{300} \cdot \frac{298}{300} \cdot \frac{297}{300} \cdot \frac{296}{300} \approx 96{,}7\%$

---

3. Benötigte Formel :

$$P\left(\left| H_n(X) - p \right| < \varepsilon^2 \right) > 1 - \frac{\mathrm{Var}\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} > 0{,}95 \quad \text{mit } \mathrm{Var}\left[H_n(X)\right] = \frac{pq}{n}$$

Bedingung :

$$P\left(\left|H_n(X)-p\right| < 0{,}05\right) \geq 1-\frac{p\cdot q}{n\cdot 0{,}05^2} \geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2} > 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4n0{,}05^2} \geq 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{4\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}05} = 2000$$

4.a) Nullhypothese $H_0 : p < p_0 = 0{,}6$

Gegenhypothese $H_1 : p \geq p_0 = 0{,}6$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{0; ....; k\right\}$

Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; k\right\}$

$$P\left(X > k+1\right) = 1-P\left(X \leq k\right) = 1-\Phi\left(\frac{k-1200\cdot 0{,}6+0{,}5}{\sqrt{1200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) \leq 0{,}05$$

$$\frac{k\ -719{,}5}{\sqrt{288}} \geq \Phi^{-1}\left(0{,}95\right) \approx 1{,}6449 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 747{,}42$$

$k = 748$

Man führt eine Wrbekampagne wenn höchstens 748 der Befragten "Booky" kennen.

b) $$P(X \leq 748) = \Phi\left(\frac{748-1200\cdot 0{,}65+0{,}5}{\sqrt{1200\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\right) = \Phi\left(-1{,}91\right) = 1\ -\Phi\left(1{,}91\right) \approx 2{,}8\%$$

---

5. a) $\Phi(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, an, dass eine (annähernd) normalverteilte Zufallsgröße X Werte kleiner oder gleich x annimmt.

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = P(\Omega) = 1$$

b) $$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt = \int_{x}^{\infty} \varphi(t)dt = 1-\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = 1 - \Phi(x)$$
