Abitur 2002		Infinitesimalrechnung II

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow \ln(\frac{4}{x} - 1)$ mit dem max. Definitionsbereich $D_f =]0; 4[$

   Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

.

   b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

   c) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zu Z(2; 0) ist.

   d) Berechnen Sie f(0,5). Zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse. Zeichnen Sie auch die Tangente im Symmetriezentrum ein

   (Ursprung des Koordinatensystems in der Blattmitte).

   f besitzt eine Umkehrfunktion, die mit g bezeichnet wird.

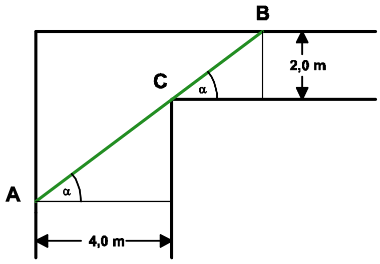
   e) Zeigen Sie, dass gilt: $g(x) = 4 - \frac{4e^x}{1 + e^x}$. Tragen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1. d) ein.

   f) Berechnen Sie mit Hilfe der Umkehrfunktion g das Integral $\int_0^2 f(x)dx$.

---

2. Zwei Gänge von 2,0 m und 4,0 m Breite treffen rechtwinklig aufeinander. Es soll die größtmögliche Länge Leines Balkens ermittelt werden, den man in horizontaler Lage aus einem Gang in den anderen tragen kann.

   Die Dicke des Balkens wird als vernachlässigbar klein angesehen.



   Dazu betrachte man die gezeichnete Figurl(α).ist die Maßzahl der in Meter angegebenen Länge der Strecke[AB] und definiert für $0° < \alpha < 90°$ die Funktion l.

   a) Geben Sie an, welche Bedeutung die Maßzahl der gesuchten Lange L für die Funktion l hat. Zeigen Sie :

$$l(\alpha) = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha}$$

   b) Berechnen Sie L auf dm genau.

Lösung

---

1. a) Nullstelle : $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\frac{4}{x} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{x} - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Grenzverhalten :

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \ln(\frac{4}{x} - 1) = \infty$$

weil $\lim\limits_{x \to 0+0} (\frac{4}{x} - 1) = \infty$ und $\lim\limits_{u \to \infty} \ln u = \infty$

$$\lim_{x \to 4-0} f(x) = \lim_{x \to 4-0} \ln(\frac{4}{x} - 1) = -\infty$$

weil $\lim\limits_{x \to 4-0} (\frac{4}{x} - 1) = 0+0$ und $\lim\limits_{u \to 0+0} \ln u = -\infty$

---

b) Monotonieverhalten :

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 1} \cdot (-\frac{4}{x^2}) = -\frac{4}{4x - x^2} = -\frac{4}{x(4-x)} < 0 \text{ für } 0 < x < 4,$$

f ist auf D_f streng monoton fallend.

---

c) Punktsymmetrie zu Z(2; 0) :

Zu zeigen : $f(2-x) = -f(2+x)$

$$f(2+x) = \ln\left(\frac{4}{2+x} - 1\right) = \ln\left(\frac{4-(2+x)}{2+x}\right) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

$$f(2+x) = \ln\left(\frac{4}{2-x} - 1\right) = \ln\left(\frac{4-(2-x)}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

---

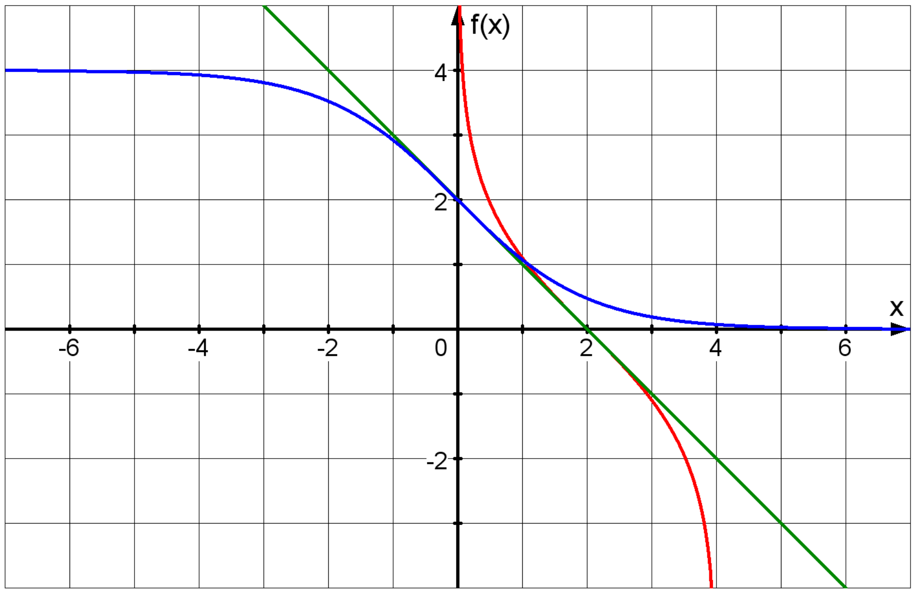
d) $f(0,5) = \ln(\frac{4}{0,5} - 1) = \ln 7 \approx 1,95$

Tangente im Symmetriepunkt :

1. Anstieg : $f'(2) = -\frac{4}{2 \cdot (4-2)} = -1$

2. Gleichung : $y = -1\cdot(x-2)+0 = -x+2$

Graph :



---

e) Umkehrfunktion :

1. Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x

$$y = \ln\left(\frac{4}{x}-1\right) \Leftrightarrow \frac{4}{x}-1 = e^y \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 1+e^y \Leftrightarrow 4 = (1+e^y)\cdot x \Leftrightarrow x = \frac{4}{1+e^y}$$

2. Vertauschen von x und y

$$y = \frac{4}{1+e^x} \quad \text{Also } f^{-1}(x) = \frac{4}{e^x+1}$$

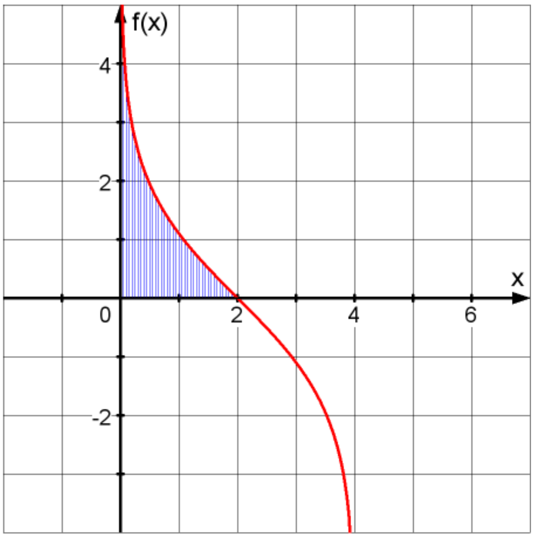
Umformung von g(x) : $g(x) = 4-\frac{4e^x}{1+e^x} = \frac{4\cdot(1+e^x)-4e^x}{1+e^x} = \frac{4}{1+e^x} = f^{-1}(x)$

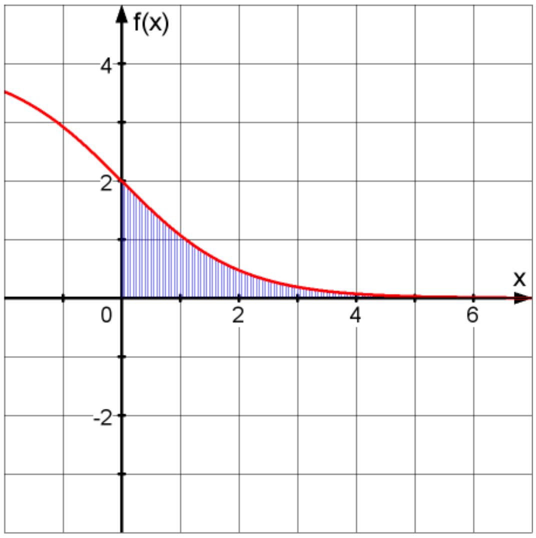
Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten hervor.

---

f) Es handelt sich um ein uneigentliches Integral :

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^\infty g(x)dx \text{ (vgl. Bild)}$$





$$I(a) = \int_0^a \left(4 - \frac{4e^x}{1+e^x}\right)dx = \Big[4x - 4\cdot\ln(1+e^x)\Big]_0^a = \Big[4a - 4\cdot\ln(1+e^a)\Big] - \Big[0 - 4\cdot\ln 2\Big] =$$

$$= 4\cdot\ln 2 + 4a - 4\cdot\ln(1+e^a) = 4\cdot\ln 2 + 4\cdot\ln e^a - 4\cdot\ln(1+e^a) = 4\ln 2 + 4\cdot\ln\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)$$

Wegen $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{e^a}{1+e^a} = \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^a}+1} = 1$ ist $\lim\limits_{a\to\infty} \ln\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right) = 0$ und damit $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = 4\ln 2$

---

2. a) $\frac{4}{\overline{AC}} = \cos\alpha \Rightarrow \overline{AC} = \frac{4}{\cos\alpha}$ und $\frac{2}{\overline{BC}} = \sin\alpha \Rightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\sin\alpha}$

$$l(\alpha) = \overline{AC} + \overline{BC} = \frac{4}{\cos\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha} = 4\sin^{-1}\alpha + 2\cos^{-1}\alpha$$

b) $l'(\alpha) = -\frac{4}{\cos^2\alpha}\cdot(-\sin\alpha) - \frac{2}{\sin^2\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$

$$\frac{4\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow 4\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha = 0 \Rightarrow \tan^3\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \approx 38{,}44°$$

$\Rightarrow L \approx 8{,}3$ m
