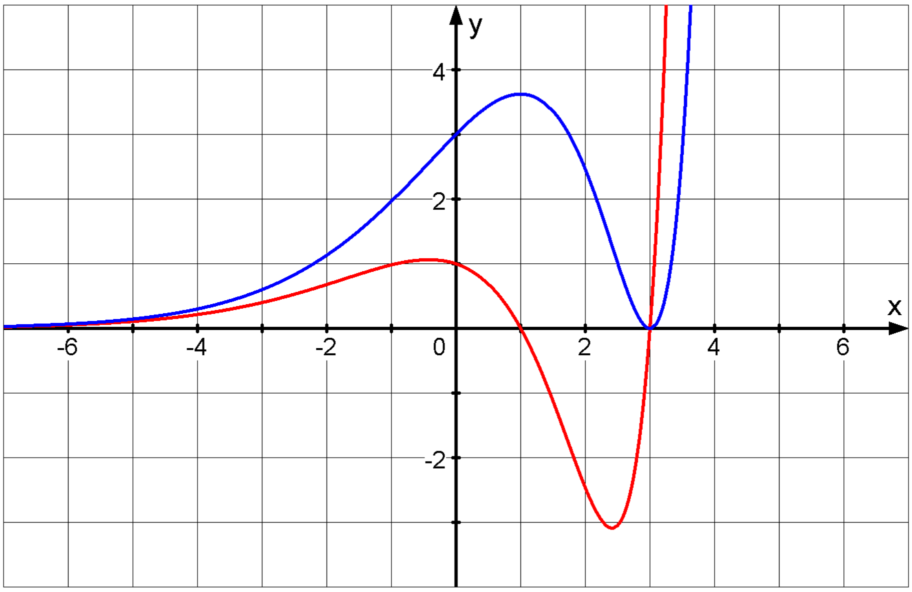
Das Schaubild zeigt den Graphen G_f einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f und den Graphen G_F einer Stammfunktion F von f. Die Achsenschnittpunkte beider Graphen sowie der Berührpunkt von G_F mit der x-Achse haben ganzzahlige Koordinaten.



1. a) Erläutern Sie, dass das dargestellte Monotonieverhalten von G_F sowie das dargestellte Krümmungsverhalten von G_F in Einklang damit stehen, dass F Stammfunktion von f ist.

   b) G_f und die x-Achse umranden im 4. Quadranten ein Flächenstück. Bestimmen Sie dessen Inhalt mit Hilfe von G_F auf eine Dezimale genau.

---

2. Es gilt: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ mit a, b, c $\in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe der im Schaubild dargestellten Achsenschnittpunkte von G_f die Werte der Parameter a, b und c .

   b) Ermitteln Sie mit Hilfe partieller Integration einen Term für F und überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Teil aufgabe 1.b)

   c) Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{3} f(x)dx$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

---

3. f und F (vgl. Teilaufgabe 2) gehören zur Funktionenschar $g_k : x \to \frac{1}{3}(x-3)(x-k)e^x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und k $\in \mathbb{R}$.

   a) Fur welchen Parameterwert k erhält man f, für welchen F ? Geben Sie den gemeinsamen Punkt aller Schargraphen an.

b) f besitzt als einzige Funktion der Schar eine Stammfunktion, die ebenfalls der Schar angehört.

Zeigen Sie dies beispielsweise, indem Sie für zwei verschiedene Parameterwerte k_1 und k_2 den Ableitungsterm $g_{k_1}'(x)$ berechnen und mit $g_{k_2}(x)$ vergleichen.

Lösung

==

1. a) f nimmt auf $]-\infty; 1[\cup]3; \infty[$ nur positive Funktionswerte an.

Daher muss F in jedem dieser Intervalle streng monoton steigend sein.

f nimmt auf $]1; 3[$ nur negative Funktionswerte an.

Daher muss F in jedem dieser Intervalle streng monoton fallend sein.

In Intervallen, in denen f monoton wächst, muss F linksgekrümmt sein und in Intervallen, in denen f monoton fällt, muss F rechtsgekrümmt sein.

Dies ist alles gegeben.

b) $A = \left| F(3) - F(1) \right| \approx 3{,}6$

----

2. a) (1) $f(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$

(2) $f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = 0$

(3) $f(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a + 3b + c = 0$

---

(1) in (2) und (3) :

(4) $f(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + 1 = 0$

(5) $9a + 3b + 1 = 0$

$(5) - 3\cdot(4): \; 6\cdot a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{4}{3}$

Ergebnis : $f(x) = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1)\cdot e^x = \frac{1}{3}\cdot(x^2 - 4x + 3)\cdot e^x$

b) $\int (x^2 - 4x + 3)e^x dx = (x^2 - 4x + 3)\cdot e^x - \int (2x - 4)\cdot e^x dx$

$= (x^2 - 4x + 3)\cdot e^x - (2x - 4)\cdot e^x + 2\cdot e^x + C = = (x^2 - 6x + 9)\cdot e^x + C$

Also $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9)\cdot e^x + C$

(3; 0) eingesetzt ergibt : $C = 0$

Überprüfung : $A = \left| F(3) - F(1) \right| = \left| 0 - \frac{4}{3}e \right| \approx 3{,}62$

c) $J(a) = \int_a^3 f(x)dx = F(3) - F(a) = -\frac{1}{3}(a^2 - 9a + 9)\cdot e^a \Rightarrow \lim_{a \to -\infty} J(a) = 0$

Die im unendlich ausgedehnte Fläche die der Graph von f im 1. und 2. Quadranten mit der x-Achse einschließt ist genauso groß wie die Fläche der Graph im 4. Quadranten mit der x-Achse einschließt.

---

3. a) Man erhält f für $k = 1$ und F für $k = 3$

Gemeinsamer Punkt : $\left(3;\, 0\right)$

b) $g_{k_1}(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x-k_1)\cdot e^x = \frac{1}{3}(x^2 - 3x - k_1x + 3k_1)\cdot e^x$

$g_{k_1}'(x) = \frac{1}{3}(2x - 3 - k_1)\cdot e^x + \frac{1}{3}(x^2 - 3x - k_1x + 3k_1)\cdot e^x = \frac{1}{3}(x^2 - x - k_1x + 2k_1 - 3)\cdot e^x$

Vergleich mit

$g_{k_2}(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x-k_2)\cdot e^x = \frac{1}{3}(x^2 - 3x - k_2x + 3k_2)\cdot e^x$

ergibt : (1) $2k_1 - 3 = 3k_2$ und (2) $-1 - k_1 = -3 - k_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 + 2$

(2) in (1) ergibt $2k_2 + 4 - 3 = 3k_2 \Leftrightarrow k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = 3$
