Abitur 2001		Stochastik II

Ein Fitness-Studio hat 300 weibliche und 200 männliche Mitglieder.

1. 30 % der weiblichen Mitglieder sind älter als 50 Jahre. Ein Viertel der über 50-jährigen Mitglieder sind Männer.

   Mit welcher W'keit ist ein männliches Mitglied älter als 50 Jahre ?

---

2. In jeder Woche verlost der Inhaber des Fitness-Studios eine Wochenendreise unter den Mitgliedern.

   a) Mit welcher W'keit gewinnen bei den nächsten 50 Verlosungen mehr Frauen als Männer ?

   b) Wie oft muss die Verlosung mindestens durchgeführt werden, damit mit einer W'keit von mehr als 99,9 % wenigstens ein männliches Mitglied eine Wochenendreise gewinnt ?

---

3. In einer Illustrierten wird behauptet, dass mindestens 20 % der Besucher von Fitnessstudios Mittel zu sich nehmen, mit denen sie gegen geltende Doping-Bestimmungen verstoßen würden. Spontan erklären sich alle Mitglieder des Fitness-Studios zu einem Test bereit.

   200 Mit-glieder werden rein zufällig dazu ausgewählt.

   a) Die Nullhypothese

      H_0 : Mindestens 20 % nehmen Doping-Mittel

      soll auf dem Signifikanzniveau 1 % getestet werden.

      Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

   b) Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese H_0 nicht ablehnen kann, obwohl nur 9 % der Besucher von Fitnessstudios Doping-Mittel verwenden.

      Verwenden Sie die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

---

4. 12 neue Mitglieder haben sich angemeldet, darunter ein Ehepaar. Sie werden rein zufällig so auf drei verschiedene Übungsgruppen aufgeteilt, dass in die 1. Gruppe 4, in die 2. Gruppe 3 und in die 3. Gruppe 5 der neuen Mitglieder kommen.

   Mit welcher W'keit ist das Ehepaar zusammen in einer Gruppe ?

---

5. Eine Zufallsgröße X hat die folgende Verteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b

a) Wie groß sind die Werte a und b, wenn die Zufallsgröße X den Erwartungswert 1,8 hat ? Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X.

Das der Zufallsgröße X zugrunde liegende Zufallsexperiment wird 500-mal unabhängig ausgeführt. Wi rbetrachten die Zufallsgröße

$$S = \sum_{i=1}^{500} X_i = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_{500},$$

wobei die X_i die gleiche Verteilung wie die Zufallsgröße X besitzen.

b) Schätzen Sie mit der Tschebyschow-Ungleichung die Wahr'keit dafür ab, dass der Wert von S größer als 850 und kleiner als 950 ist.

c) Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsgröße S nahezu normalverteilt.

Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, die in Teilaufgabe 5.b) mit der Tschebyschow-Ungleichung abgeschätzt wurde.

Lösung

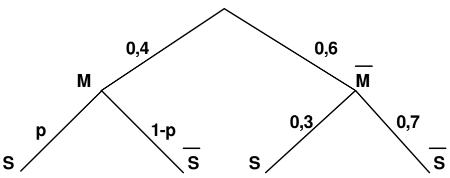
==

1. M : Das Mitglied ist männlich   S : Das Mitlied ist über 85

Gegeben : $P(M) = 0{,}4 \quad P(S \mid \overline{M}) = 0{,}30 \quad P(M \mid S) = 0{,}25$

Gesucht : $P(S \mid M)$

Baumdiagramm :



$$P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \mid M) \cdot P(M)}{P(S \mid M) \cdot P(M) + P(S \mid \overline{M}) \cdot P(\overline{M})}$$

Mit $p = P(S \mid M)$ und eingesetzt ergibt sich : $0{,}25 = \dfrac{0{,}4 \cdot p}{0{,}4 \cdot p + 0{,}3 \cdot 0{,}6} \Rightarrow p = 0{,}15$

---

2. a) $P\left(X > 25\right) = 1 - P\left(X \le 25\right) = 1 - F_{0,6}^{50}(25) = 1 - 0{,}08781 \approx 90{,}2\%$

b) Bedingung : $P\left(X \ge 1\right) > 0{,}999 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X = 0\right) < 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad B\left(n; 0{,}4; 0\right) < 0{,}001$

$(1-0,4)^n < 0,001 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \Rightarrow n \geq 14$

---

3. a) Nullhypothese : $p \geq p_0 = 0,2$

Gegenhypothese : $p < p_0 = 0,2$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k+1; ...; 200\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; k\right\}$

Bedingung : $\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}}\right) \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \leq k\right) \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad F_{0,2}^{200}(k) \leq 0,01$

Aus der Stochastiktabelle : $k = 26$

$\mathbb{A} = \left\{27; ...; 200\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; 26\right\}$

b) Fehler 2. Art :

$$P\left(X \geq 27\right) = 1 - P\left(X \leq 26\right)() = 1 - \Phi\left(\frac{26 - 200 \cdot 0,09 + 0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,09 \cdot 0,91}}\right) = 1 - \Phi\left(2,10\right) \approx 1,8\%$$

---

4. 1. $\left|\Omega\right| = \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} = 27720$

2. $\left|A\right| = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} + \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{5} + \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 7980$

3. $P(A) \approx 28,8\%$

---

5. a) (1) $0,11 + 0,32 + 0,32 + 0,12 + a + b = 1 \Rightarrow a + b = 0,1$

(2) $0 \cdot 0,11 + 1 \cdot 0,32 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,12 + 4 \cdot a + 5 \cdot b = 1,8 \Rightarrow 4 \cdot a + 5 \cdot b = 0,42$

$\Rightarrow b = 0,02 \quad a = 0,08$

$\mathrm{Var}(X) = 1,34 \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 1,158$

b) Benötigte Ungleichung und Bedingung : $P\left(\left|X - E(X)\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

mit $E(X) = 500 \cdot 1,8 = 900$, $\varepsilon = 50$ und $\mathrm{Var}(X) = 500 \cdot 1,34 = 670$

Eingesetzt ergibt sich : $1 - \dfrac{670}{50^2} \geq 73{,}2\%$

c) $P\left(850 \leq X \leq 950\right) = \Phi\left(\dfrac{950 - 900 + 0{,}5}{\sqrt{670}}\right) - \Phi\left(\dfrac{850 - 900 - 0{,}5}{\sqrt{670}}\right) =$

$= \Phi(1{,}91) - \Phi(-1{,}91) = 2 \cdot \Phi(1{,}91) - 1 \approx 94{,}4\%$