Abitur 2001		Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \to kx \cdot \sqrt{4 - kx}$

mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge D_k. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

1.a) Bestimmen Sie D_k, das Verhalten von g_k an den Rändern von D_k und die Nullstellen von g_k.

b) Bestätigen Sie, dass im Inneren von D_k gilt: $g_k'(x) = \dfrac{k(8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}}$.

Bestimmen Sie den Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente und berechnen Sie $g_k'(0)$.

c) Begründen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass der in Aufgabe 1.b) ermittelte Kurvenpunkt Hochpunkt von G_k ist. Geben Sie die Wertemenge von g_k an.

d) Untersuchen Sie das Verhalten von g_k' bei Annäherung an den rechten Rand von D_k. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ und G_1 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

e) G_k und die positive x-Achse schließen das Flächenstück A_k ein. Berechnen Sie das Volumen V_k des Rotationskorpers R_k, der bei Rotation von A_k um die x-Achse entsteht.

Der Graph H_k der Funktion $h_k : x \to \sqrt{\dfrac{x \cdot (4-kx)}{k}}$ mit $k > 0$ und Definitionsmenge $[0; \frac{4}{k}]$ ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{2}{k}; 0\right)$ und dem Radius $\frac{2}{k}$ (Nachweis nicht erforderlich).

2. a) Zeichnen Sie $H_{0,5}$ und H_1 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1. d) ein.

b) Zeigen Sie, dass für $k \le 0{,}5$ die Graphen G_k und H_k genau zwei gemeinsame Punkte haben.

[Hinweis : Ausschluss eines dritten Schnittpunktes fur $k < 0{,}5$ durch Betrachtung der Definitionsmenge]

c) Wenn H_k um die x-Achse rotiert, entsteht die Kugel K_k. Für $k \le 0{,}5$ lässt sich aus dem Rohling K_k durch geeignetes Abschleifen der Rotationskorper R_k [vgl. Teilaufgabe 1.e)] herstellen.

Begründen Sie, für welches k das Verhältnis der Volumina von R_k und K_k am günstigsten, also der Volumenanteil des Abfalls kleinstmöglich ist.

Für welches k entstehen genau 50 % Abfall ?

Lösung

===

1. a) $4 - kx \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{k}$

Also ist $D_k =]-\infty; \frac{4}{k}\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x) = -\infty$, weil $\lim\limits_{x \to -\infty} kx = -\infty$ und $\lim\limits_{u \to -\infty} \sqrt{1-u} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{4}{k}-0} g_k(x) = g_k(\frac{4}{k}) = 0$ da g_k rechtsseitig stetig ist.

$g_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx \cdot \sqrt{4-kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{4}{k}$

b) $g_k'(x) = k \cdot \sqrt{4-kx} + kx \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-kx}} \cdot (-k) = \frac{8k - 2k^2x - k^2x}{2\sqrt{4-kx}} =$

$= \frac{8k - 3k^2x}{2\sqrt{4-kx}} = \frac{k \cdot (8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}}$

$g_k'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{3k} \qquad H\left(\frac{8}{3k}; \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$

$g_k'(0) = 2k$

----

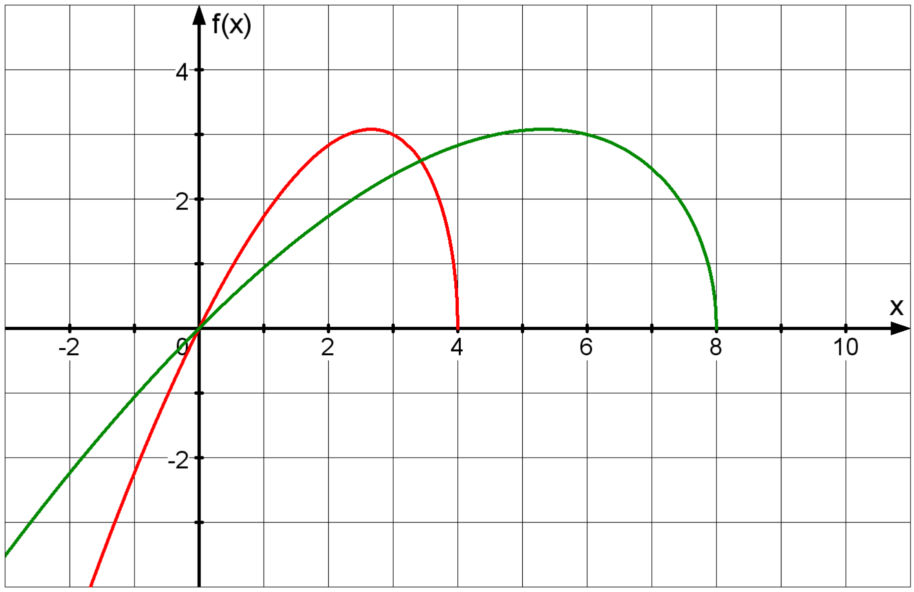
c)

c)x	$-\infty < x < \frac{8}{3k}$	$\frac{8}{3k} < x < \frac{4}{k}$
$g_k'(x)$	+	−

H ist ein Hochpunkt. Also ergibt sich für die Wertemenge $W = [0; \frac{16}{9}\sqrt{3}]$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{4}{k}-0} g_k'(x) = \lim\limits_{x \to \frac{4}{k}-0} \frac{k \cdot (8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}} = -\infty$

weil $\lim\limits_{x \to \frac{4}{k}-0} k \cdot (8-3kx) = -4k$ und $\lim\limits_{x \to \frac{4}{k}-0} 2\sqrt{4-kx} = 0+0$

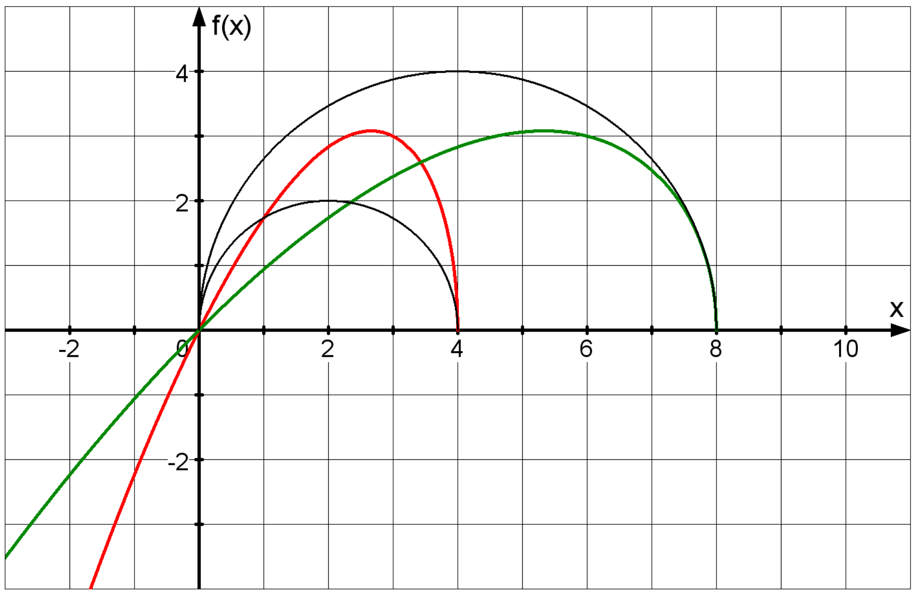


e) $V(k) = \pi\int_0^{\frac{4}{k}}(kx\sqrt{4-kx})^2dx = \pi\int_0^{\frac{4}{k}}k^2x^2\cdot(4-kx)dx = \pi\int_0^{\frac{4}{k}}(4k^2x^2-k^3x^3)dx =$

$$= \pi\cdot\left[\frac{4}{3}k^2x^3-\frac{1}{4}k^3x^4\right]_0^{\frac{4}{k}} = \frac{64}{3k}\pi$$

---

2. a)



b) $\sqrt{\frac{x\cdot(4-kx)}{k}} = kx\sqrt{4-kx} \quad\Rightarrow\quad \frac{x(4-kx)}{k} = k^2x^2(4-kx)$

$\Rightarrow \quad x(4-kx)(\frac{1}{k}-k^2x) = 0$

$$\Rightarrow \; x = 0 \lor x = \frac{4}{k} \lor x = \frac{1}{k^3}$$

Da $\frac{1}{k^3} \leq \frac{4}{k}$ sein muss, gibt es für $k < 0{,}5$ bzw. $k = 0{,}5$ keinen dritten Schnittpunt.

c) $$A(k) = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8}{k^3} - \frac{64}{3k}\pi}{\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8}{k^3}} = 1 - 2k^2$$

A(k) ist für $k > 0$ streng monoton abnehmend.

Daher erhält man für $k = 0{,}5$ den prozentual wenigsten Abfall.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8}{k^3} = \frac{64}{3k}\pi \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}5$$
