In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A\left(10 \mid 0 \mid 0\right)$, $B\left(0 \mid 10 \mid 0\right)$ und die Ebenenschar

$$H_a : ax_1 - x_3 = 0,\ a \in \mathbb{R}^+,$$

gegeben. F_a ist der Fußpunkt des von A aus auf die Ebene H_a gefällten Lots.

Der Lotfußpunkt F_a, der Koordinatenursprung O und die Punkte A und B bilden die Ecken des Tetraeders $OABF_a$. Dieses Tetraeder ist nicht regulär, d. h., die Kanten sind nicht alle gleich lang.

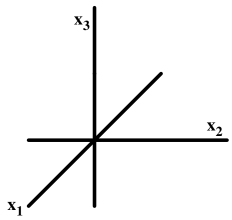
l. a) Begründen Sie, dass alle Ebenen H_a die x_2-Achse enthalten.

Welche Ebene erhält man für $a \to \infty$?

b) Berechnen Sie die Koordinaten von F_a.

c) Zeichnen Sie das Tetraeder $OABF_a$ für $a = 2$ in ein Schrägbild des Koordinatensystems ein

(Querformat,Ursprung in der Blattmitte).



d) Begründen Sie, dass alle Seitenflächen des Tetraeders $OABF_a$ rechtwinklige Dreiecke sind !

e) Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt M des (rechtwinkligen!) Dreiecks OAB.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass M auch Mittelpunkt der Kugel ist, auf der alle Ecken des Tetraeders $OABF_a$ liegen.

Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.

---

2. a) Berechnen Sie das Tetraedervolumen V_a und begründen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt, für das V_a maximal wird.

b) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Ebene H_a, die den Mittelpunkt N der Strecke $\left[AF_2\right]$ enthält.

Diese Ebene schneidet das Tetraeder $OABF_2$ und zerlegt es in zwei Teilkörper.

Kennzeichnen Sie die entstandene Schnittfläche im Schrägbild aus Teilaufgabe 1.c)

.

Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Teilkörper stehen.

c) In welchem Verhältnis teilt die Ebene $H_{\frac{1}{3}}$ den Winkel zwischen den an der Kante $\left[OB\right]$ zusammenstoßenden Seitenflächen des Tetraeders $OABF_2$?

Lösung

===

1. a) Jede Ebene H_a ist parallel zur x_2-Achse und enthält den Nullpunkt des Koordinatensystems.

$$ax_1 - x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - \frac{x_3}{a} = 0 \quad \overset{a \to \infty}{\longrightarrow} \quad x_1 = 0$$

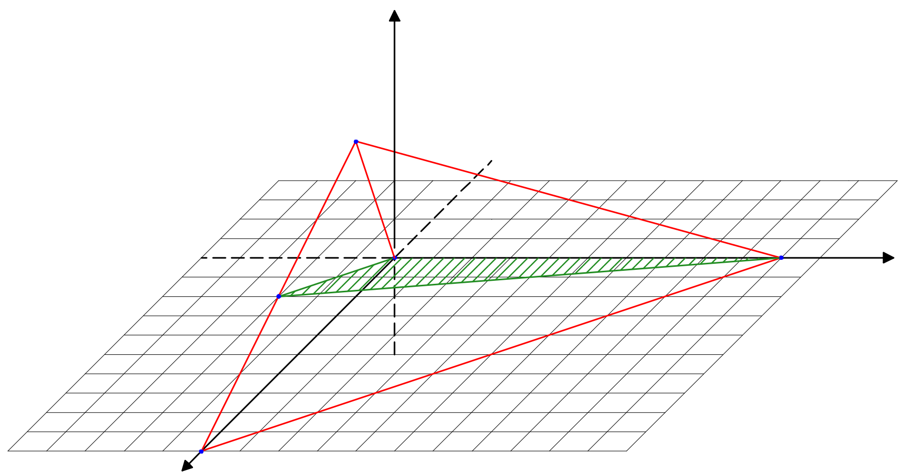
Man erhält für $a \to \infty$ die x_2x_3-Koordinatenebene

b) Lotgerade durch A zu H_a : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

In H_a eingesetzt : $a \cdot (10 + \lambda a) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{10}{1+a^2}$

In die Lotgerade eingesetzt ergibt sich $F_a\left(\frac{10}{1+a^2} \mid 0 \mid \frac{10a}{1+a^2}\right)$

c)



d) Das Dreieck ABO ist trivialerweise rechtwinklig bei O.

Das Dreieck F_aBO ist ebenfalls rechtwinklig bei O, weil BO ein Lot auf die x_1x_3-Koordinatenebene ist.

$$\overrightarrow{F_aA} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{1+a^2} \\ 0 \\ -\frac{10a}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{F_aO} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{1+a^2} \\ 0 \\ -\frac{10a}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_aA} \cdot \overrightarrow{F_aO} = =$$

$$\overrightarrow{F_aA} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{1+a^2} \\ 0 \\ -\frac{10a}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{F_aB} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{1+a^2} \\ 10 \\ \frac{-10a}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_aA} \cdot \overrightarrow{F_aB} = 0$$

e) Der Umkreismittelpunkt M des Dreiecks OAB ist der Mittelpunkt der Hypotenuse $\left[AB\right]$.

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M(5 \mid 5 \mid 0)$$

Da das Dreieck auch ABF_a einen rechten Winkel bei F_a hat, liegt F_a ebenfalls auf einem Kreis um M mit $r = \frac{\overline{AB}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Daher liegen alle Eckpunkte der Pyramide auf einer Kugel um M mit $r = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Gleichung der Kugel : $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + x_3^2 = 50$

---

2. a) $V_a = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left| \frac{10a}{1+a^2} \right| = \frac{500}{3} \cdot \left| \frac{a}{1+a^2} \right|$

Sei $a > 0$ Dann gilt

$$V_a = \frac{500}{3} \cdot \frac{a}{1+a^2} \quad \Rightarrow \quad V_a' = \frac{500}{3} \cdot \frac{1 \cdot (1+a^2) - a \cdot 2a}{(1+a^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Wegen $V_0 = 0$ und $\lim\limits_{a \to \infty} V_a = 0$ ergibt sich für $a = 1$ ein maximales Pyramidenvolumen.

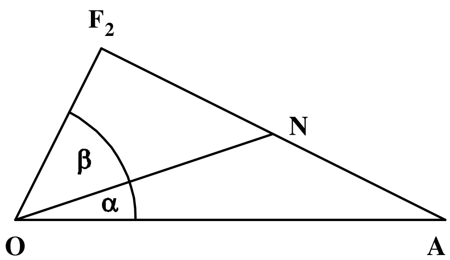
b) Mittelpunkt von $\left[AF_2\right]$: $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{f_2}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad N\left(6 \,|\, 0 \,|\, 2\right)$

N in H_a : $6a - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$

$\left[ON\right]$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks AOF_2.

Die Ebene $H_{\frac{1}{3}}$ halbiert das Tetraeder.

c) In der x_1x_3-Ebene betrachtet :



$\overline{OF_2} = 2\sqrt{5} \quad \overline{F_2A} = 4\sqrt{5}$

$\tan\beta = 45° \quad \Rightarrow \quad \beta = 45°$

$\tan(\alpha + \beta) = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 63{,}4°$

$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{63{,}4° - 45°}{45°} \approx 0{,}4$