In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte

$A(4 \mid 1 \mid 3)$, $P(-2 \mid -2 \mid 9)$ und $Q(1 \mid -5 \mid -3)$ sowie die Ebenenschar

$E_t: 8x_1 - tx_2 + 7x_3 + 3 = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Es sei $\vec{e_1} = \mu \cdot \overrightarrow{AP}$ und $\vec{e_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{AQ}$ mit $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^+$.

   Bestimmen Sie μ, λ und einen weiteren Vektor $\vec{e_3}$ so, dass $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

---

2. a) Welche Ebene der Schar E_t besitzt den größten Abstand vom Koordinatenursprung ?

   b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist E_t echt parallel zur Geraden AP ?

   Diese zu AP parallele Ebene der Schar wird mit E bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Punkt Q in E liegt.

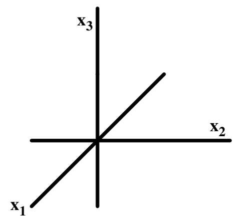
   c) Geben Sie eine Gleichung in Normalenform für die Ebene H an, in der die Punkte A, P und Q liegen.

   d) Die Schnittgerade von H und E ist s. Begründen Sie, dass s parallel zu AP ist, und geben Sie eine Gleichung von s an.

---

3. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B und C in der Ebene E sowie des Punkts D auf der Strecke $[AP]$ derart, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist, das in einer zu H senkrechten Ebene liegt.

   b) Legen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems an (ganze Seite, Ursprung in der Blattmitte) und tragen Sie das Quadrat ABCD, die Schnittgerade ssowie die Punkte P und Q ein.



---

4. Die Punkte A, B, Q, D und C bilden zusammen mit einem Punkt R ein Prisma mit der Grundfläche ABQ.

   a) ZeIchnen Sie das Prisma in das Koordinatensystem von Aufgabe 3. b) ein und begründen Sie, dass das Prisma gerade ist.

   b) Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

Lösung

==

1. $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

----

2. a) HNF von E_t : $\dfrac{8x_1 - tx_2 + 7x_3 + 3}{\sqrt{113 + t^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad d(O; E_t) = \dfrac{3}{\sqrt{113 + t^2}}$

Die zu $t = 0$ gehörige Ebene hat vom Nullpunkt des Koordinatensystems den größten Abstand.

b) Bedingung : $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -t \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2$

Gleichung von E : $8x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3 = 0$

Q in E : $8 - 2 \cdot (-5) - 7 \cdot (-3) + 3 = 8 + 10 - 21 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \in E$

A in $8 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 7 \cdot 3 + 3 = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \notin E$

c) Gleichung von H : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 9 = 0$

d) Q ist Element der Schnittgeraden s. Wäre s nicht parallel zu AP, dann würden sich s und AP schneiden. Dies steht im Widerspruch zu $AP \parallel E$.

Schnittgerade s : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

----

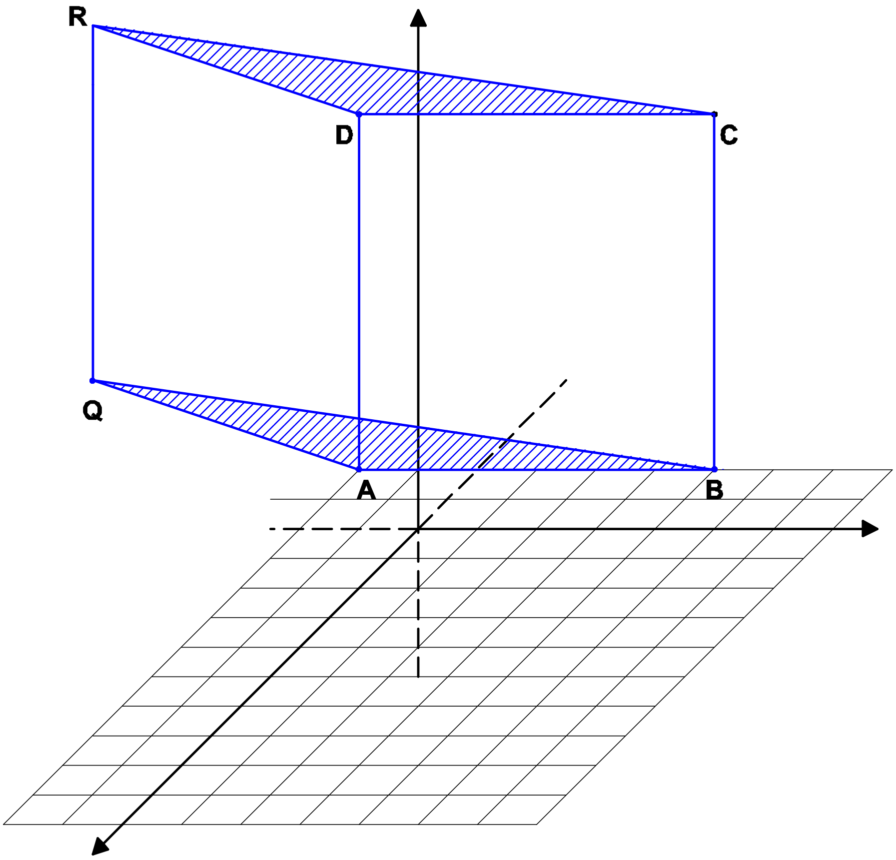
3. a) Lotgerade zu H durch E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E : $8 \cdot (4 + 2\sigma) - 2 \cdot (1 - 2\sigma) + 7 \cdot (3 + \sigma) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = -2$

Eingesetzt ergibt sich $B(0 \mid 5 \mid 1)$

$\vec{c} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

b)



---

4. a) Es ist $AD \perp H$ und $BC \perp H$

b) $\overline{AQ} = 9$ und $\overline{AB} = \overline{AD} = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6^2 = 162$