Abitur 2000		Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f_k : x \to (k^2 x + k) \cdot e^{-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

b) Bestimmen Sie Lage und Art des ExtrempunktsvonG$_k$.

$$\left[\text{zur Kontrolle} : f_k\,' = -k^3 x e^{-kx}\right]$$

c) Zeigen Sie, dass G_k genau einen Wendepunkt W_k besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. Weisen Sie nach, dass $ey = k \cdot (3 - kx)$ eine Gleichung der Wendetangente t_k ist

Geben Sie eine Gleichung der Kurve C an, auf der alle Punkte W_k liegen.

d) Berechnen Sie $f_1(1{,}6)$. Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse G_1 und t_1 im Bereich $x \in [-1{,}5; 4]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(Längeneinheit 2 cm)

---

2. a) Durch $F(x) = (ax + b) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f_1 gegeben.

Bestimmen Sie a und b.

b) Der Graph G_1 und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück einen endlichen Inhalt besitzt.

---

3. Begründen Sie, dass die Einschränkung von f_1 auf $\mathbb{R}^+$ eine Umkehrfunktion h besitzt, und geben Sie deren Definitions- und Wertebereich an. Der Term von h soll nicht explizit ermittelt werden.

Begründen Sie, an welcher Stelle die Ableitung von h ein lokales Extremum aufweist. Bestimmen Sie den Wert der Ableitung von h an dieser Stelle.

---

4. Der Funktionswert $f_1(t)$ sei die Maßzahl für die Masse einer Substanz in Abhängigkeit von der Zeit.

Dabei ist t die Maßzahl der von Messbeginn an in Sekunden gemessenen Zeit ($t \geq 0$).

a) Zu welchem Zeitpunkt ist die Massenabnahme am stärksten ?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nach T Sekunden ist die Anfangsmasse auf die Hälfte abgesunken. Bestimmen Sie ein Intervall der Länge $\frac{1}{10}$ in dem T liegt.

Lösung

==

Gegeben : $f_k(x) = (k^2x + k)\cdot e^{-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und $D = \mathbb{R}$

1\. a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen :

x-Achse : $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k^2x + k)\cdot e^{-kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2x + k = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{k} \text{ und damit } S_x\left(-\frac{1}{k}; 0\right)$$

y-Achse : $f(0) = (k^2\cdot 0 + k)\cdot e^{-k\cdot 0} = k$ und damit $S_y\left(0; k\right)$

Grenzverhalten :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (k^2x + k)\cdot e^{-kx} = \lim_{x \to \infty} \frac{k^2x + k}{e^{kx}} \overset{'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{k^2}{k\cdot e^{kx}} = 0 + 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (k^2x + k)\cdot e^{-kx} = -\infty$$

weil $\lim_{x \to -\infty} (k^2x + k) = -\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} e^{-kx} = \infty$

b) $f_k'(x) = k^2\cdot e^{-kx} + (k^2x + k)\cdot e^{-kx}\cdot(-k) = -k^3x\cdot e^{-kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Kritischer Punkt d.h. Punkt mit waagrechter Tangente : $E\left(0; k\right)$

$f_k''(x) = -k^3\cdot e^{-kx} - k^3\cdot x\cdot e^{-kx}\cdot(-k) = k^3\cdot(kx - 1)\cdot e^{-kx}$

$f_k''(x) = k^3\cdot(k\cdot 0 - 1)\cdot e^{-k\cdot 0} = -k^3 < 0$ d.h. E ist ein Hochpunkt.

c) Wendepunkte : $f_k''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^3\cdot(kx - 1)\cdot e^{-kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{k}$

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \left(k^2 \cdot \frac{1}{k} + k\right) \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k}} = 2k \cdot e^{-1}$$

x	$-\infty < x < \frac{1}{k}$	$\frac{1}{k} < x < \infty$
$f_k''(x)$	$-$	$+$
	RK	LK

d.h. $W\left(\frac{1}{k}; 2ke^{-1}\right)$ ist Wendepunkt

Gleichung der Wendetangente :

1. Anstieg : $f_k'\left(\frac{1}{k}\right) = -k^3 \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k}} = -k^2 \cdot e^{-1} = -\frac{k^2}{e}$

2. Gleichung : $y = -\frac{k^2}{e}\left(x - \frac{1}{k}\right) + \frac{2k}{e} = -\frac{k^2}{e}x + \frac{3k}{e} \quad \Leftrightarrow \quad ey = k \cdot (3 - kx)$

Ortskurve der Wendepunkte :

(1) $x = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{x}$ (2) $y = \frac{2k}{e}$

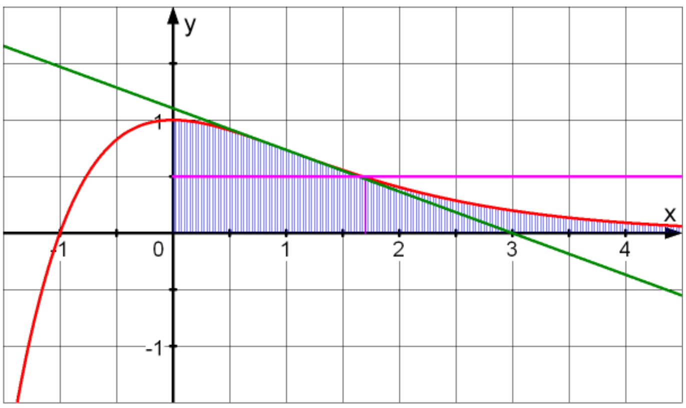
(1) in (2) : $y = \frac{2}{ex}$

c) $f_1(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$

Besondere Punkte : $S_x(-1; 0)$ $E(0; 1)$ $W(1; \frac{2}{e})$ Wendetangente : $y = -\frac{1}{e} \cdot x + \frac{3}{e}$

$f_1(1{,}6) = (1{,}6 + 1) \cdot e^{1{,}6} \approx 0{,}52$

Graph :



2. a) Bedingung : $F'(x) = a \cdot e^{-x} + (ax+b) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (a-b-ax) \cdot e^{-x} = (x+1) \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow \quad a-b = 1 \;\wedge\; -a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \;\wedge\; b = -2$ d.h. $F(x) = (-x-2) \cdot e^{-x}$

b) $A(c) = \int_0^c f_1(x)dx = \Big[(-x-2) \cdot e^{-x}\Big]_0^c = \Big[(-c-2) \cdot e^{-c}\Big] - \Big[(0-2) \cdot e^0\Big] = 2 - \frac{c+2}{e^c}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{c \to \infty} A(c) = 2$

---

3. f_1 ist auf $\mathbb{R}^+$ streng monton fallend also f_1 ist auf $\mathbb{R}^+$ umkehrbar.

$D_h =]0; 1[\quad W_h = \mathbb{R}^+$

Der Wendepunkt von f_1 ist auch Wendepunkt von h d.h. die Ableitung von h hat in $\frac{2}{e}$ ein Extremum.

$h'(\frac{2}{e}) = \frac{1}{f_1'(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{e}} = -e$

---

4. a) Stärkste Massenabnahme bei $t = 1$ (Wendepunkt)

b) Graphische Lösung : $T \in [1{,}6; 1{,}7]$
