Abitur 1999		Stochastik I

1. Der Zugang zu einem Computer eines Netzwerks ist durch ein zehnstelliges Codewort gesichert. Jede Stelle des Codeworts wird mit gleicher W'keit aus einem Vorrat von 64 Zeichen besetzt.

   a) Mit welcher W'keit besteht das Codewort aus lauter verschiedenen Zeichen ?

   b) Mit welcher W'keit enthält das Codewort nur Zeichen aus einer bestimmten Teilmenge von 30 Zeichen ?

   c) Sind die Ereignisse aus a) und b) stochastisch unabhängig ? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

2. Ein Unternehmensberater setzt für die Zufallsgröße

   X: Anzahl der täglichen Systemabstürze

   folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung als Planungsgrundlage an :

x	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,67	0,25	0,05	0,03

   a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X.

   b) 365 Tage lang wird die Anzahl X der Systemabstürze pro Tag beobachtet.

   Bestimmen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall um den Erwartungswert von X, in dem das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der Anzahl der Abstürze pro Tag mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90 % liegen muss.

   c) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die W'keit dafür, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ um weniger als $\varepsilon > 0$ vom Erwartungswert von X abweicht, gegen 1 geht, wenn die Zahl n der Beobachtungstage beliebig groß wird.

---

3. Bei einer genaueren Untersuchung des Netzwerks stellt sich heraus, dass Abstürze unabhängig voneinander auftreten und zu 60 % auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen sind.

   a) Es werden die nächsten Abstürze beobachtet. Mit welcher W'keit ist

   (1) frühestens der vierte, (2) spätestens der vierte Absturz

   auf einen reinen Bedienungsfehler zurückzuführen ?

   b) Berechnen Sie die W'keit dafür, dass bei den nächsten 150 Abstürzen mehr als 100 durch reine Bedienungsfehler verursacht werden. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

---

4. Das Personal wird einer Schulung unterzogen. Angeblich sind danach nur noch höchstens 40% der Abstürze auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen.

Bei den nächsten 100 Systemabstürzen waren in 45 Fällen reine Bedienungsfehler die Ursache.

Untersuchen Sie, ob man die Vermutung, dass nur noch höchstens 40 % der Abstürze auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen sind, auf Grund dieses Testergebnisses auf dem Signifikanzniveau von 5% ablehnen kann.

Lösung

===

1. a) 1. $\left|\Omega\right| = 64^{10}$

2. $\left|A\right| = 64 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot 55 = \dfrac{64!}{54!}$ oder $\left|A\right| = \binom{64}{10} \cdot 10! = \dfrac{64!}{54!}$

3. $P(A) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{\frac{64!}{54!}}{64^{10}} \approx 47{,}7\%$

b) 2. $\left|B\right| = 30^{10}$ 3. $P(B) = \dfrac{\left|B\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{30^{10}}{64^{10}} \approx 0{,}051\%$

c) 2. $\left|A \cap B\right| = \binom{30}{10} \cdot 10! = \dfrac{30!}{20!}$

3. $P(A \cap B) = \dfrac{\left|A \cap B\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{\frac{30!}{20!}}{64^{10}} \approx 0{,}0095\% \neq P(A) \cdot P(B)$

A und B sind voneinander abhängig !

---

2. a) $E(X) = 0 \cdot 0{,}67 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}03 = 0{,}44$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0^2 + 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}03 - 0{,}44^2 = 0{,}5264$

$\Rightarrow \sigma = \dfrac{\sqrt{329}}{25}$

b) Benötigte Ungleichung : $P\left(\left|\overline{X} - E(\overline{X})\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \dfrac{Var(\overline{X})}{\varepsilon^2} \geq 0{,}90$

mit $E(\overline{X}) = E(X) = 0{,}44$ und $Var(\overline{X}) = \dfrac{Var(X)}{n}$. Dabei ist $n = 365$

Eingesetzt :

$$1-\frac{\frac{329}{625}}{365\cdot\varepsilon^2}\geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1\geq\frac{329}{365\cdot 625\cdot\varepsilon^2} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon^2\geq\frac{329}{365\cdot 625\cdot 0{,}1} \Rightarrow \varepsilon\geq 0{,}121 \quad \text{Also } I = \left[0{,}319;\, 0{,}561\right]$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{Var(\overline{X})}{\varepsilon^2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{Var(X)}{n\cdot\varepsilon^2}\right] = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-E(\overline{X})\right|\leq\varepsilon\right) = 1$

---

3. a) $P(E_1) = 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4 = 6{,}4\%$

$P(E_2) = 1-P(\overline{E_2}) = 1-0{,}4^4 = 97{,}44\%$

b) $E(X) = 150\cdot 0{,}6 = 90 \quad \sigma = \sqrt{150\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4} = 6$

$$P(X>100) = 1-P(X\leq 100) = 1-\Phi\left(\frac{100-90+0{,}5}{6}\right) = 1-\Phi\left(1{,}75\right)\approx 4{,}0\%$$

---

4. Nullhypothese : $p = p_0 = 0{,}40$

Gegenhypothese : $p > p_0 = 0{,}4$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{0;\, ...;\, k\right\}$

Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{k+1;:\, ...;\, 100\right\}$

Bedingung : $\alpha = P(X\in\overline{\mathbb{A}})\leq 0{,}05 \quad\Leftrightarrow\quad P(X\geq k+1)\leq 0{,}05 \quad\Leftrightarrow\quad P(X\leq k)\geq 0{,}95$

$$F_{0,4}^{100}(k)\geq 0{,}95 \quad\Rightarrow\quad k = 48$$

Die Vermutung kann nicht abgelehnt werden.
