Gegeben ist die Funktion $f: x \to x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie D_f und prüfen Sie, ob der Graph Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt. Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

   b) Zeigen Sie : $f'(x) = -f(x) \cdot \dfrac{2x-1}{x^2}$.

   Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung Art und Lage des Extrempunkts von G_f.

   c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f, die den Ursprung enthält.

   d) Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie des Grenzwerts

   $$\lim_{x \to 0+0} f'(x) = 0 \text{ (Nachweis nicht verlangt)}$$

   den Graphen G_f im Bereich $-3 \le x \le 3$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 2 cm. Zeichnen Sie auch die Tangente t ein.

----

2. Die Integralfunktion J ist definiert durch $J(x) = \int_{0,5}^{x} f(t)dt$ für $x > 0$.

   a) Begründen Sie ohne Berechnung der integralfreien Darstellung von J, weshalb folgende Aussagen zutreffen :

   J ist streng monoton steigend.

   J besitzt genau eine Nullstelle.

   Der Graph von J hat genau einen Wendepunkt.

   b) Ermitteln Sie nun eine integralfreie Darstellung von J(x). Berechnen Sie die Grenzwerte

   $$\lim_{x \to \infty} J(x) \text{ und } \lim_{x \to 0+0} J(x)$$

   und geben Sie den Inhalt des Flachenstücks an, das sich im 1. Quadranten zwischen dem Graphen G_f und der x-Achse ins Unendliche erstreckt.

c) Skizzieren Sie den Graphen von J unter Verwendung aller Ergebnisse in das Koordinatensystem von Teil aufgabe 1. d).

Lösung

==

1. a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Der Graph von f besitzt keine Schnittpunkte nit den Koordinatenachse,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \text{ da } \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \text{ da } \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} u^2 e^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{e^u} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{2u}{e^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{2}{e^u} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = \infty \text{ da } \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x^2} = \infty \text{ und } \lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$$

b) $$f'(x) = -2\cdot x^{-3}\cdot e^{-\frac{1}{x}} + x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-2x}{x^2} = f(x)\cdot\frac{1-2x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 0{,}5$	$0{,}5 < x < \infty$
$f'(x)$	+	+	−
	sms	sms	smf

$E\left(0{,}5;\, 4\cdot e^{-2}\right)$ ist ein Hochpunkt des Graphen

c) Sei t Tangente im Punkt $\left(x_0;\, f(x_0)\right)$

Ansatz : $y = -f(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

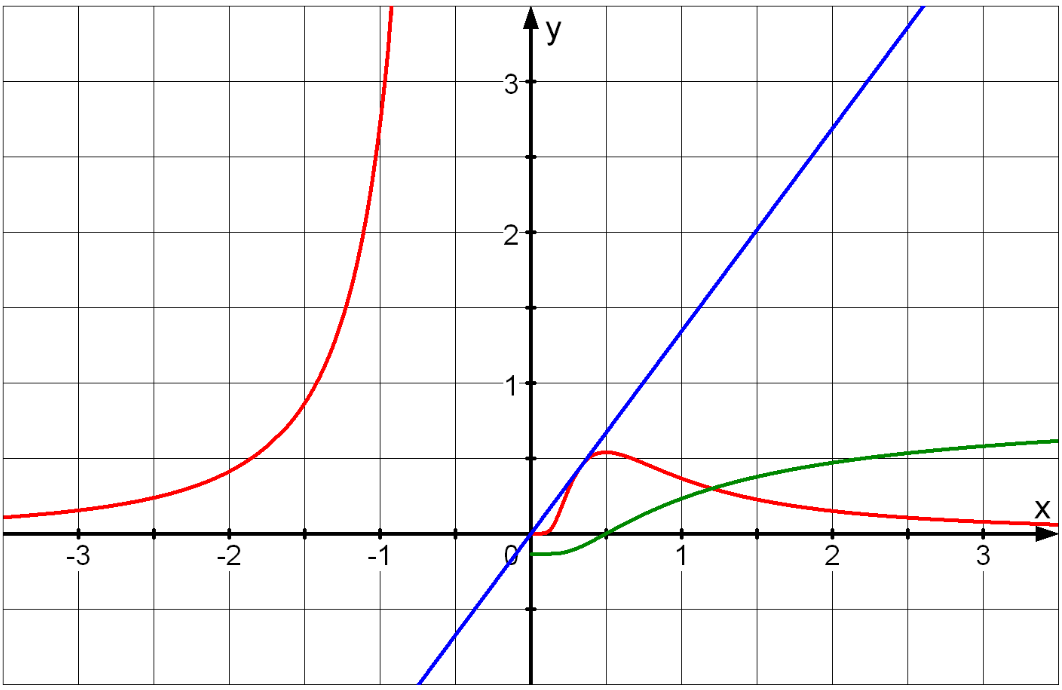
$\left(0;\, 0\right)$ eingesetzt :

$$0 \;=\; -f(x_0)\cdot\frac{2x_0-1}{{x_0}^2}(0-x_0)+f(x_0) \quad\Rightarrow\quad 0 = -\frac{2x_0-1}{{x_0}^2}\cdot(-x_0)+1 \quad\Rightarrow$$

$$0 \;=\; -x_0+2{x_0}^2+{x_0}^2 \quad\Rightarrow\quad x_0 \;=\; \frac{1}{3}$$

$$\text{Tangente}: y \;=\; -f(\tfrac{1}{3})\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{3}-1}{(\frac{1}{3})^2}\cdot x \;=\; -\frac{e^{-3}}{(\frac{1}{3})^2}\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2}\cdot x \;=\; \frac{27}{e^3}\cdot x$$

d) Graph



---

2. a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt :

Die Funktion J ist differenzierbar mit $J'(x) = f(x)$.

Daher ist J streng monoton steigend, weil $f(x) > 0$ für $x > 0$ ist.

J besitzt die triviale Nullstelle $x = \frac{1}{2}$. Wegen der Monotonie von J ist es die einzige.

f besitzt nur den Hochpunkt $E\left(0{,}5;\, 4\cdot e^{-2}\right)$.

Also ist $\left(0{,}5;\, 0\right)$ der einzige Wendepunkt des Graphen von J.

b) Unbestimmtes Integral : $\int f(t)dt = \int \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \cdot dt = \int e^u du = e^u + C' = e^{-\frac{1}{t}} + C$

$$J(x) = \int_{0,5}^{x} f(t)dt = \left[e^{-\frac{1}{t}} \right]_{0,5}^{x} = e^{-\frac{1}{x}} - e^{-2}$$

$$\lim_{x \to \infty} J(x) = \lim_{x \to \infty} (e^{-\frac{1}{x}} - e^{-2}) = 1 - e^{-2}$$

und

$$\lim_{x \to 0+0} J(x) = \lim_{x \to 0+0} (e^{-\frac{1}{x}} - e^{-2}) = -e^{-2}$$

$$\mathfrak{A} = 1 - e^{-2} + e^{-2} = 1$$
