Abitur 1998		Analytische Geometrie VI

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(2 \mid -1 \mid 0)$ und

$C(1 \mid 2 \mid -11)$, die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-t \\ -1+3t \\ -11t \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, t \in \mathbb{R}$

sowie die Ebene $E: x_1 + 4x_2 + x_3 + 2 = 0$ gegeben.

1. a) Wie liegen die Geraden g_t zueinander ?

   Zeigen Sie, dass durch die Geradenschar g_t, $t \in \mathbb{R}$, die gleiche Punktmenge wie durch die Ebene E beschrieben wird.

   b) Untersuchen Sie, ob eine Gerade g_t die x_1-Achse schneidet.

   c) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf g_0 liegt.

   Bestimmen Sie ferner die Koordinaten des Punkts $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ auf der Geraden g_0 so, dass gilt: $\overline{AB} = 12$ und $b_1 < 0$. $\left[B(-6 \mid 3 \mid -8)\right]$

   d) Der Punkt C liegt in E (Nachweis nicht erforderlich). Auf welcher Geraden g_t liegt er?

   e) Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g_0 und g_1.

---

2. a) Begründen Sie, dass es einen Punkt D auf g_1 gibt, der zusammen mit den Punkten A, B und C ein achsensymmetrisches Trapez festlegt.

   Bestimmen Sie die Koordinaten von D und eine Gleichung der Symmetrieachse s dieses Trapezes ABCD.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes. $\left[\text{zur Kontrolle}: 45\sqrt{2}\right]$

---

3. Die Kugel k hat den Mittelpunkt $M(-8 \mid -3 \mid 0)$ und den Radius $r = 6\sqrt{2}$

   a) Begründen Sie, dass k die Ebene E schneidet.

   Wie groß ist der Radius des Schnittkreises ?

   b) ABCDS ist eine Pyramide, deren Spitze S auf der Kugel k liegt. Berechnen Sie das größtmögliche Volumen, das eine solche Pyramide haben kann.

Lösung

==

1. a) Die Geraden g_t sind zueinander parallel.

Die Umformung : $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-t \\ -1+3t \\ -11t \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

zeigt, dass alle Punkte der Schargeraden eine Ebene bilden.

Eine Gleichung der Ebene ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Weil der Aufpunkt dieser Ebene in E liegt und

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ sowie $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ist diese Ebene mit E identisch.

b) Bedingung : (1) $x_2 = -1+3t+\lambda = 0$ (2) $x_3 = -11t-2\lambda = 0$ (3) $-11t-2\lambda = 0$

(2) und (3) $\Rightarrow \lambda = -5{,}5t$ in (1) $-1+3t-5{,}5t = 0 \Rightarrow t = -0{,}4$

Die Gerade $g_{-0,4}$ schneidet die x_1-Achse.

c) A ist der Aufpunkt von $g_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ansatz für B : $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bedingung : $\overline{AB} = 12 \quad \Rightarrow \quad 4\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4 \vee \lambda = 4$

Eingesetzt ergeben sich : $B_1\left(10 \mid -5 \mid 8\right)$ und $B_2\left(-6 \mid 3 \mid -8\right)$

Also ist B_2 der gesuchte Punkt.

d) C in g_t : (1) $1 = 2 - t - 2\lambda$ (2) $2 = -1 + 3t + \lambda$ (3) $-11 = -11t + \lambda$

(3) $\Rightarrow \lambda = t - 1$

in (2) $2 = -1 + 3t + t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Der Punkt C liegt auf der Geraden g_1

e) Aufpunkte von g_0 und g_1 : $\left(2 \mid -1 \mid 0\right)$ bzw. $\left(1 \mid 2 \mid -11\right)$

Richtungsvektor der Geraden ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Differenzvektor der Aufpunkte : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d(g_0; g_1) = \frac{15\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$$

---

2. a) Mittelpunkt der Strecke $\left[AB\right]$ ist $M\left(-2 \mid 1 \mid -4\right)$.

$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ steht nicht auf $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ senkrecht.

Daher und weol g_0 und g_1 echt parallel sind,

erhält man durch Spiegelung von C an der Symmetrieebene S zu A und B einen Punkt D so, dass ABCD ein Trapez ist, Ansatz für S : $-2x_1 + x_2 - 2x_3 + n_4 = 0$

Mittelpunkt der Strecke $\left[AB\right]$: $M\left(-2 | 1 | -4\right)$

M in S einggesetzt : $4 + 1 + 8 + n_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_4 = -13$

Lotgerade durch C zu S : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lotgerade in S : $-2\cdot(1 - 2\tau) + (2 + \tau) - 2\cdot(-11 - 2\tau) - 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = -1$

D ergibt sich für $\tau = -2$: $D\left(5 | 0 | -5\right)$

Lotfußpunkt : $F\left(3 | 1 | -9\right)$

Gleichung der Symmetrieachse : $\vec{x} = \vec{m} + \rho\cdot\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \rho\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = 6$

$\mathfrak{J}_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot(12 + 6)\cdot 5\sqrt{2} = 45\sqrt{2}$

---

3. a) HNF von E : $\dfrac{x_1 + 4x_2 + x_3 + 2}{-3\sqrt{2}} = 0$

Abstand des Kugelmittelpunktes von E : $d = \left| \dfrac{-8 - 24 + 2}{-3\sqrt{2}} \right| = 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$

Die Kugel schneidet die Ebene.

$r^2 = {r_1}^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{22}$

b) $\mathfrak{J}_{max} = \frac{1}{3}\cdot 45\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\right) = 330$
