In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind gegeben :

Die Punkte $A(1|5|-2)$, $B(11|0|-2)$, $C(5|8|-2)$, die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die

die Ebenenschar $H_a: 3x_1 - 4x_2 + 5ax_3 + (17 - 15a) = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und berechnen Sie die Längen seiner Katheten.

   b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene G, in der A, B und C liegen, in Normalenform an.

   Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat G ?

   c) Zeigen Sie, dass die Geraden h und $g = AC$ echt parallel sind.

   d) Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h und bestimmen Sie die Punkte D und E auf h so, dass das Viereck ADEC ein Rechteck ist.

   Begründen Sie, dass dieses Rechteck senkrecht auf der Ebene G steht.

   $\left[\text{Teilergebnis : } D(1 \mid 5 \mid 3)\right]$

   e) Die Punkte A, D, E, C und B bilden eine Pyramide. Fertigen Sie eine saubere Skizze an, in der diese Pyramide sowie die Ebene G und die Geraden g und h eingetragen sind.

   f) Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide ADECB.

---

2. a) Zeigen Sie, dass h in jeder Ebene H_a liegt.

   b) Wie muss a gewählt werden, damit H_a die Strecke [BC] schneidet ?

   c) Die Pyramide ADECB wird von der Ebene H_1 in einer Fläche Σ geschnitten.

   P ist der Schnittpunkt der Ebene H_1 und der Strecke $[BC]$.

   Kennzeichnen Sie Σ in der Skizze aus Teilaufgabe l.e).

   Bestimmen Sie dazu das Verhältnis, in dem P die Strecke $[BC]$ teilt.

   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Σ.

Lösung

==

1\. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei C.

$\overline{BC} = 10 \quad \overline{CA} = 5$

b) $G : x_3 + 2 = 0$

Die Ebene G ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

c) $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g \parallel h$

A in h :

(1) $1 = 5 + 4\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$

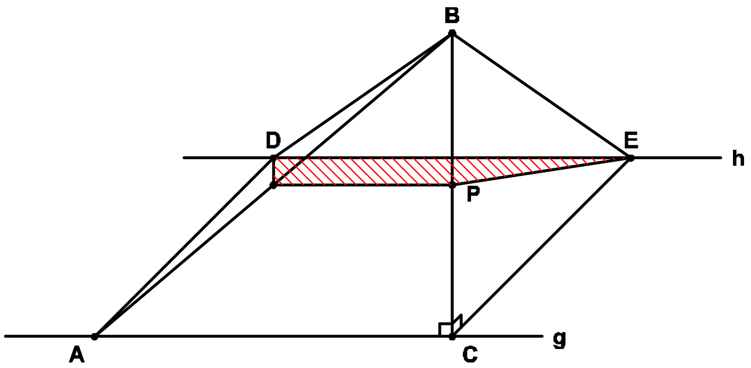
(2) $5 = 8 + 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$

(3) $-2 = 3$ (f) $\quad \Rightarrow \quad A \notin h$

d) Es ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d(g; h) = 5 \quad E\left(5 \mid 8 \mid 3 \right)$

$\vec{d} = \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad D\left(1 \mid 5 \mid 3 \right)$

Die Ebene, in der das Rechteck ABCD liegt ist parallel zur x_3-Achse. Sie steht daher auf G senkrecht.



f) $\mathfrak{A}_{ADEC} = 5 \cdot 5 = 25$

$\mathfrak{V}_{ADECB} = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 10 = \frac{250}{3}$

---

2. a) h in $H_a : 3\cdot(5+4\lambda) - 4\cdot(8+3\lambda) + 5a\cdot 3 + (17-15a) = 0 \quad \Rightarrow \quad h \subset H_a$

b) $BC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

BC in $H_a : 3\cdot(11-6\sigma) - 4\cdot 8\sigma + 5a\cdot(-2) + (17-15a) = 0 \quad \Rightarrow \quad -50\sigma = -50 + 25a$

$\sigma = 1 - 0{,}5a$

Bedingung : $0 \le 1 - 0{,}5a \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le a \le 2$

c) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und P teilt die Strecke $\left[BC\right]$ im Verhältnis 1 : 1.

d) Σ ist ein Trapez mit der Höhe $h = \overline{PE}$

$\overrightarrow{PE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{PE} = 5\sqrt{2}$

$\mathfrak{J}_{\Sigma} = \frac{1}{2} \cdot (5 + 2{,}5) \cdot 5\sqrt{2} = \frac{75}{4}\sqrt{2}$
