

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4 % der Rinder den Erreger der Seuche B in sich; diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet.

Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

1. a) Mit welcher W'keit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder?

b) Mit welcher W'keit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder ? Schätzen Sie diese W'keit mit der Ungleichung von Tschebyschow ab.

c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer W'keit von mehr als 90 % wenigstens ein B-Rind entdeckt wird ?

2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher W'keit sind mindestens 100 dieser Rinder B Rinder ? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.

3. Durch einen zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau soll mit einer Stichprobe von 200 Rindern

der Prozentsatz für B-Rinder überprüft werden. Bestimmen Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich

$$\bar{A} = \left\{ 0; \dots; k_1 \right\} \cup \left\{ k_2; \dots; 200 \right\} \quad \text{so, dass die Hypothese } H_0 : p = 0,04 \text{ vs. } H_1 : p = 0,04 \text{ in jedem}$$

Teilbereich

mit höchstens 2,5 % Wahrscheinlichkeit irrtümlich abgelehnt wird.

4. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p'

der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist

Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von p muss man sich

zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird

zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.

Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein

Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig.

Stellt man im

Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.

Methode II : Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht.

Für welche Werte von p sind bei Methode 1 weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II.

Lösung

1. a) $P(2 \leq X < 5) = P(2 \leq X \leq 5) = F_{0,04}^{100}(5) - F_{0,04}^{100}(1) \approx 70,1\%$

b) $P\left(\left|X - 40\right| < 10\right) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{10^2} = 1 - \frac{1000 \cdot 0,04 \cdot 0,96}{100} = 61,6\%$

c) $P(X \geq 1) > 0,90 \Leftrightarrow P(X=0) < 0,10 \Leftrightarrow 0,96^n < 0,10 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,96}$

$$n > 56,4$$

Es müssen mindestens 57 Rinder untersucht werden.

2. $P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 99) = 1 - \Phi\left(\frac{99 - 3000 \cdot 0,04 + 0,5}{\sqrt{3000 \cdot 0,04 \cdot 0,96}}\right) = 1 - \Phi(-1,91) =$
 $= \Phi(-1,91) \approx 97,2\%$

3. $P(X \leq k_1) \leq 0,025 \Leftrightarrow F_{0,04}^{200}(k_1) \leq 0,025 \Rightarrow k_1 = 2$

$P(X \geq k_2) \leq 0,025 \Leftrightarrow P(X \leq k_2 - 1) \geq 0,975 \Leftrightarrow F_{0,04}^{200}(k_2 - 1) \geq 0,975 \Rightarrow k_2 = 15$

4. X : Anzahl der Tests

$$W_X = \{1, 21\}$$

$$P(X=1) = P(Y=0) = (1-p')^{20}$$

und

$$P(X=21) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - (1-p')^{20}$$

wobei Y die Anzahl der B-Rinder unter den 20 Rindern ist.

Bedingung :

$$E(X) = 1 \cdot (1-p)^{20} + 21 \cdot \left[1 - (1-p)^{20} \right] < 20 \Rightarrow p' \leq 13,9\%$$

$$5. \Omega = \left\{ \overline{BBBBBB}, \dots, \overline{BBBBBB} \right\}$$

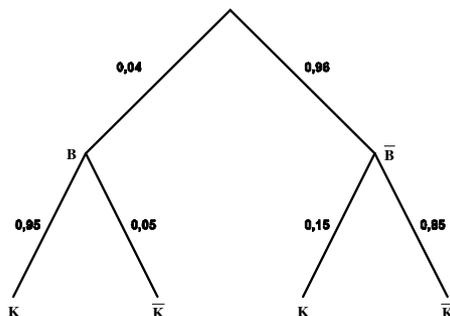
Jedes einelementige Ereignis hat die W'keit

$$p = \frac{5! \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{132} \text{ und damit ist } P(E) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{132} \approx 11,4\%$$

6. B : Das Rind leidet unter der Seuche B

K : Der Test stuft das Tier als krank ein

$$P(B) = 0,04 \quad P(K|B) = 0,95 \quad P(K|\bar{B}) = 0,15$$



$$P(\bar{B}|\bar{K}) = \frac{0,96 \cdot 0,85}{0,04 \cdot 0,05 + 0,96 \cdot 0,85} \approx 99,8\%$$
