| Abitur 1998 | | Stochastik II |
|---|---|---|

Umden Bahnverkehr zu beschleunigen, werden von einem Bahnunternehmen neue Züge eingesetzt.

Auf einer Strecke verkehren in einer Richtung täglich 9 Züge des alten Typs A und 3 Züge des neuen Typs B; jeder Zug fährt genau einmal am Tag. Die Züge sind nur hinsichtlich des Typs unterscheidbar. Züge vom Typ A haben die Pannenwahrscheinlichkeit 0,5 %, d.h., mit dieser W'keit tritt bei einer Fahrt eine Panne auf.

Es wird angenommen, dass es bei einer Fahrt höchstens zu einer Panne kommt.

1. Wie viele verschiedene Zugfolgen gibt es an einem Tag für die 12 Züge, wenn

   a) der erste Zug vom Typ B ist,

   b) keine zwei Züge vom Typ B hintereinander fahren ?

---

2. Ein Zug vom Typ A benötigt für eine pannenfreie Fahrt 40 Minuten, einer vom Typ B nur 35 Minuten. Eine Panne verlängert ausschließlich die betroffene Fahrt, und zwar um 10 Minuten. Das Bahnuntemehmen stellt fest, dass die mittlere Fahrzeit auf der Strecke 39 Minuten beträgt.

   Berechnen Sie die Pannenwahrscheinlichkeit, die Züge vorn Typ B demnach haben.

---

In der Einf'ührungssphase haben Züge vom Typ B eine Pannenwahrscheinlichkeit von 8,5 %.

3. Die 9 Züge vom Typ A und die 3 Züge vom Typ B verkehren täglich in zufälliger Reihenfolge.

   a) Mit welcher W'keit muss ein Fahrgast bei seiner Fahrt mit dem Auftreten einer Panne rechnen ?

   b) Mit welcher W'keit tritt bei fünf Fahrten mehr als eine Panne auf ?

   c) Auf einer Fahrt tritt keine Panne auf. Mit welcher W'keit war das eine Fahrt mit Typ B ?

---

4. Untersuchen Sie für 3 aufeinander folgende Fahrten eines Zugs vorn Typ B die Ereignisse

   C : Höchstens eine Pannenfahrt

   und

   D : Panne bei der zweiten Fahrt

   auf Unabhängigkeit.

---

5. Der Hersteller verbessert nun die Züge vom Typ D. Er behauptet, dass die Pannenwahr scheinlichkeit pro Fahrt jetzt nur noch höchstens 1 % beträgt.

Die Behauptung des Herstellers (Nullhypothese) soll mit einem Signifikanztest auf ein 5 %-Signifikanzniveau überprüft werden.

Dazu lässt das Unternehmen an 255 Werktagen eines Jahres bei allen 12 Fahrten am Tag nur noch Züge vom Typ B fahren und ermittelt die Anzahl der Pannenfahrten.

Bestimmen Sie mit der Normalverteilung die Entscheidungsregel.

---

**Lösung**

==================================================================

1. a) Es gibt $\frac{11!}{9!\cdot 2!} = 55$ verschiedene Zugfolgen.

b) Es gibt $\binom{10}{3} = 120$ verschiedene Zugfolgen.

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. Typ A :

| x | 40 | 50 |
|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 0,995 | 0,005 |

Typ B :

| y | 35 | 45 |
|---|---|---|
| $P(Y=y)$ | $1-p$ | p |

Bedingung : $9\cdot(0{,}995\cdot 40 + 0{,}005\cdot 50) + 3\cdot\left[(1-p)\cdot 35 + p\cdot 45\right] = 12\cdot 39 \quad\Rightarrow\quad p = 0{,}085$

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

3. a) $P(A) = \frac{9}{12}\cdot 0{,}005 + \frac{3}{12}\cdot 0{,}085 = 0{,}025 = 2{,}5\%$

b) $P(Z>1) = 1 - P(Z\le 1) = 1 - B(5;\, 0{,}025;\, 0) - B(5;\, 0{,}025;\, 1) =$

$= 1 - \binom{5}{0}\cdot 0{,}025^0\cdot 0{,}975^5 - \binom{5}{1}\cdot 0{,}025^1\cdot 0{,}975^4 \approx 0{,}59\%$

c) A : Zug vom Typ A

B : Zug vom Typ B

P : Eine Panne tritt auf

$$P(B|P) = \frac{\frac{3}{12}\cdot 0{,}085}{\frac{3}{12}\cdot 0{,}085 + \frac{9}{12}\cdot 0{,}005} = \frac{0{,}02125}{0{,}025} = 0{,}85 = 85\%$$

Ein Baumdiagramm kann hilfreich sein !

---

4. $P(C) = 0{,}915^3 + \binom{3}{1}\cdot 0{,}085\cdot 0{,}915^2 \approx 0{,}98$

$P(D) = 0{,}085$

$P(C \cap D) = 0{,}915\cdot 0{,}085\cdot 0{,}915 = 0{,}071$

$P(C)\cdot P(D) \approx 0{,}070$

Die Ereignisse sind voneinander abhängig.

---

5. $H_0 : p \le p_0 = 0{,}01$ mit $\mathbb{A} = \left\{0,\ 1,\ ....,\ k\right\}$

$H_1 : p > p_0 = 0{,}01$ mit $\mathbb{A} = \left\{k+1,\ ....,\ 3060\right\}$

Bedingung : $\alpha = P(X \in \overline{\mathbb{A}}) = P(X \ge k+1) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0{,}95$

$$\Phi\left(\frac{k - 3060\cdot 0{,}01 + 0{,}5}{\sqrt{3060\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}\right) \ge 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k - 30{,}1}{\sqrt{29{,}799}} \ge \Phi^{-1}(0{,}95) \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 30{,}1}{\sqrt{29{,}799}} \ge 1{,}6449$$

$k = 40$

Man glaubt dem Hersteller, wenn es höchstens zu 40 Pannenfahrten kommt!

---