Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_k : x \to \frac{kx}{x^2 - k^2}$$

mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge D_k: Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie D_k und untersuchen Sie G_k auf Symmetrie und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

   b) Geben Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von D_k an.

---

2. a) Bestätigen Sie, dass gilt : $f_k'(x) = \frac{-k(x^2 + k^2)}{(x^2 - k^2)^2}$. Untersuchen Sie f_k auf Monotonie.

   b) Zeigen Sie, dass der Ursprung der einzige Wendepunkt von G_k ist, und geben Sie die Gleichung derWendetangente t_k an.

   c) Besimmen Sie die Koordinaten aller weiteren Punkte von G_k, in denen die Tangenten parallel zu t_k verlaufen.

---

3. Zeichnen Sie G_2 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 1cm).

---

4. Gegeben ist die Integralfunktion $F : x \to \int_3^x f_2(t)dt$ mit $x \in]2; \infty[$

   a) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F umkehrbar ist.

   b) Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von F und bestätigen Sie, dass für die Um kehrfunktion F^{-1} gilt :

   $$F^{-1}(x) = \sqrt{5e^x + 4}$$

---

5. Gegeben ist die Funktion $h : x \to \frac{1}{x - 2}$ mit $x \in [0; 2[$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

   a) Weisen Sie nach, dass für $0 \le x < 2$ gilt : $h(x) < f_2(x)$

   b) Im vierten Quadranten liegt zwischen den Graphen G_2 und G_h ein Flächenstück. Zeigen Sie, dass dieses einen endlichen Inhalt besitzt und geben Sie ihn an.

Lösung

==

1. a) $x^2 - k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-k)(x+k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -k \vee x = k \quad \Rightarrow \quad D_k = \mathbb{R} \setminus \{-k; k\}$

$$f_k(-x) = \frac{k(-x)}{(-x)^2 - k^2} = -\frac{kx}{x^2 - k^2} = -f_k(x)$$

Der Graph von f_k ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$f_k(0) = 0$

$$f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{kx}{x^2 - k^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$S_{x/y}\left(0; 0\right)$ ist Schnittpunkt mit den beiden Achsen.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{k}{x - \frac{k^2}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to k+0} f_k(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{kx}{x^2 - k^2} = \infty$ weil $\lim\limits_{x \to k+0} kx = k^2$ und $\lim\limits_{x \to k+0} (x^2 - k^2) = 0 + 0$

$\lim\limits_{x \to k-0} f_k(x) = -\infty$ da Pol einfacher Ordnung

Aus der Punktsymmetrie folgt

$\lim\limits_{x \to -k+0} f_k(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -k-0} f_k(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = 0$

---

2. a) $f_k'(x) = \dfrac{k \cdot (x^2 - k^2) - kx \cdot 2x}{(x^2 - k^2)^2} = -\dfrac{k \cdot (x^2 + k^2)}{(x^2 - k^2)^2} < 0$

f_k ist auf $]-\infty; -k[$, $]-k; k[$ und $]k; \infty[$ jeweils streng monoton abnehmend.

b) $f_k''(x) = -k \cdot \dfrac{2x \cdot (x^2 - k^2)^2 - (x^2 + k^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - k^2) \cdot 2x}{(x^2 - k^2)^4} = 2k \cdot \dfrac{x \cdot (x^2 + 3k^2)}{(x^2 - k^2)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Krümmungsverhalten

	$-\infty < x < -k$	$-k < x < 0$	$0 < x < k$	$k < x < \infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 + 3k^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - k^2)^3$	$+$	$-$	$-$	$+$

$f_k''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

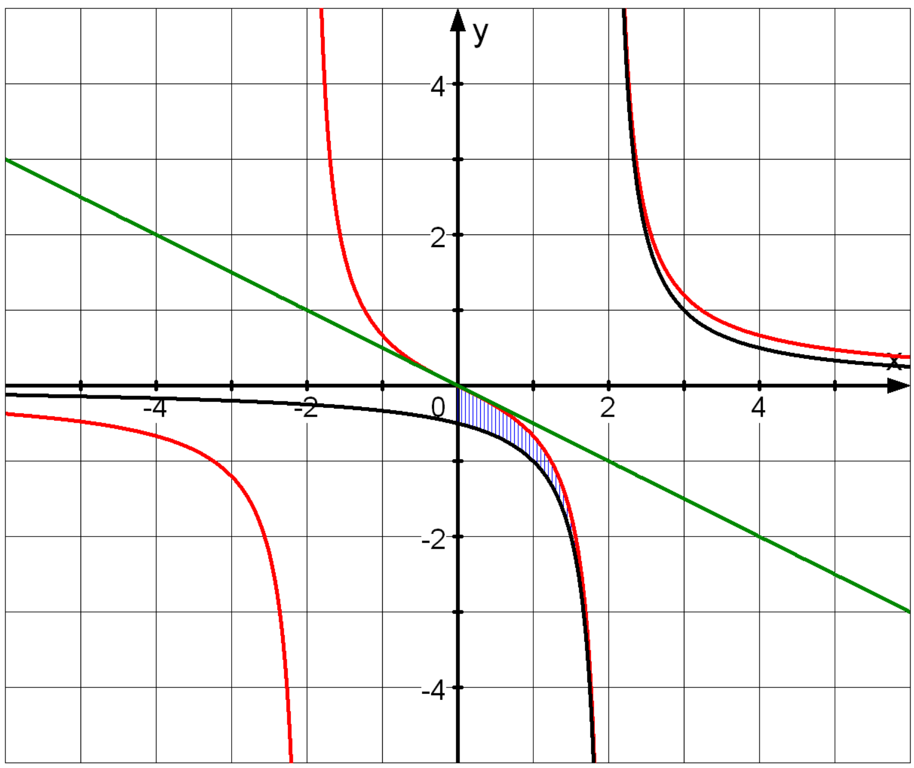
$$f_k'(0) = -\frac{1}{k}$$

$$t_k : y = -\frac{1}{k}\cdot x$$

$$\text{Bedingung}: f_k'(x) = \frac{-k(x^2+k^2)}{(x^2-k^2)^2} = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow k^2x^2+k^4 = x^4-2k^2x^2+k^4$$

$$\Leftrightarrow x = -k\sqrt{3} \vee x = k\sqrt{3}$$

$$T_1\left(-k\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ und } T_2\left(k\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



---

3. a) Es ist $f_2(x) > 0$ für $x > 2$.

Also ist F für $x > 2$ streng monoton zunehmend und daher umkehrbar.

b) $$\int_3^x \frac{2t}{t^2-4}\,dt = \Big[\ln(t^2-4)\Big]_3^x = \ln(x^2-4) - \ln 5$$

Auflösen naxh x :

$$y = \ln(x^2-4)-\ln 5 \quad\Rightarrow\quad x^2-4 = e^{y+\ln 5} \quad\Rightarrow\quad x^2 = 4+5\cdot e^y \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{4+5\cdot e^y}$$

Also ist $F^{-1}(x) = \sqrt{4+5\cdot e^x}$

---

5. a) $f_2(x)-h(x) = \dfrac{2x}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2} > 0$

b) $\displaystyle\int_0^a \left(\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int_0^a \frac{1}{x+2}\,dx = \ln\frac{1}{a+2} - \ln\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad A(a) = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{a+2}$

$\displaystyle\lim_{a\to 2} A(a) = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{4} = \ln 2$
