Abitur 1998		Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \to \ln\dfrac{x+1}{6-|x|}$

mit maximaler Definitionsmenge D. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. Zeigen Sie : $D = \,]-\infty;\ -6[\ \cup\ ]-1;\ 6[$

2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen Gf mit den Koordinatenachsen.

3. Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Randern von $]-1;\ 6[$.

4. a) Zeigen Sie, dass gilt : $f'(x) > 0$ für $x \in\ ]-1;\ 6[\backslash\{0\}$.

   Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0-0} f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x)$.

$$\left[\text{Teilergebnis : } f'(x) = \frac{7}{(x+1)\cdot(6-x)} \text{ für } 0 < x < 6\right]$$

b) Untersuchen Sie, fur welchen Wert von x der Term $(x+1)\cdot(6-x)$ ein lokales Extremum annimmt.

   Begründen Sie (ohne Verwendung von f ") anhand des Terms f '(x), dass G_f in $]0;\ 6[$ genau einen Wendepunkt W besitzt, und geben Sie die Koordinaten von W an.

---

5. Berechnen Sie f(5) und f '(2,5). Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Intervall $]-1;\ 6[$.

   Arbeiten Sie insbesondere die Ergebnisse der Grenzwertbetrachtungen aus Teilaufgabe 4.a) erkennbar ein (Längeneinheit 1 cm, Ursprung in Blattmitte).

---

6. a) Die Einschränkung von f auf $]-1;\ 0[$ wird mit g bezeichnet.

   Begrunden Sie, dass g eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, und zeigen Sie, dass gilt :

$$g^{-1}(x) = -1 - \frac{5e^x}{e^x - 1}$$

   b) Zeichnen Sie den Graphen von g^{-1} in das Koordinatensystem von Aufgabe 5 ein.

---

7. Im dritten Quadranten wird durch die Koordinatenachsen, den Graphen von g und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ ein Flächenstück begrenzt.

   Zeigen Sie, dass es einen endlichen Inhalt besitzt, und geben Sie diesen an.

Lösung

==

1. Bedingung : $\frac{x+1}{6-|x|} > 0$

	$-\infty < x < -6$	$-6 < x < -1$	$-1 < x < 6$	$6 < x < \infty$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$6-\lvert x\rvert$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x+1}{6-\lvert x\rvert}$	$+$	$-$	$+$	$-$

---

2. $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{6-|x|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 6-|x|$

1. Fall $x > 0$: $x+1 = 6-x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2{,}5$

2. Fall $x < 0$: $x+1 = 6+x$ (Widerspruch)

$S_x\left(2{,}5;\, 0\right)$

$f(0) = \ln\frac{0+1}{6-0} = \ln\frac{1}{6} = -\ln 6$

---

3. $\lim\limits_{x \to -1+0} \ln\frac{x+1}{6-|x|} = -\infty$, weil $\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{x+1}{6-|x|} = 0+0$ und $\lim\limits_{u \to 0+0} \ln u = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 6-0} \ln\frac{x+1}{6-|x|} = \infty$, weil $\lim\limits_{x \to -6-0} \frac{x+1}{6-|x|} = \infty$ und $\lim\limits_{u \to \infty} \ln u = \infty$

---

4. a) 1. Fall $0 < x < 6$:

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{6-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{6-x}} \cdot \frac{1\cdot(6-x)-(x+1)\cdot(-1)}{(6-x)^2} = \frac{7}{(x+1)\cdot(6-x)} > 0$$

für $0 < x < 6$

2. Fall $-1 < x < 0$:

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{6+x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{6+x}} \cdot \frac{1\cdot(6+x)-(x+1)\cdot 1}{(6+x)^2} = \frac{5}{(x+1)\cdot(6+x)} > 0$$

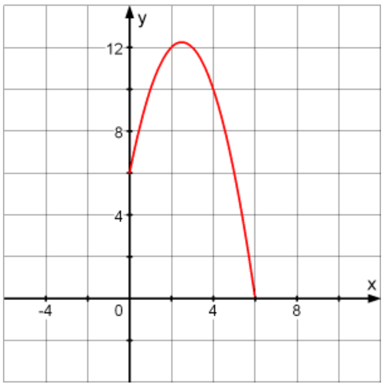
für $-1 < x < 0$

$$\lim_{x \to 0-0} f'(x) = \frac{5}{1 \cdot 6} = \frac{7}{6} \text{ und } \lim_{x \to 0+0} f'(x) = \frac{7}{1 \cdot 6} = \frac{7}{6}$$

b) Sei $p(x) = (x+1)\cdot(6-x) = -x^2+5x+6 \quad \Rightarrow \quad p'(x) = -2x+5$

Die durch p(x) definierte Parabel hat den Hochpunkt

$H\left(2{,}5;\ 12{,}25\right)$



Wegen $f'(x) = \frac{7}{p(x)}$ für $0 < x < 6$ hat f ' bei $x = 2{,}5$ einen

Tiefpunkt und f damit an dieser Stelle einen Wendepunkt.

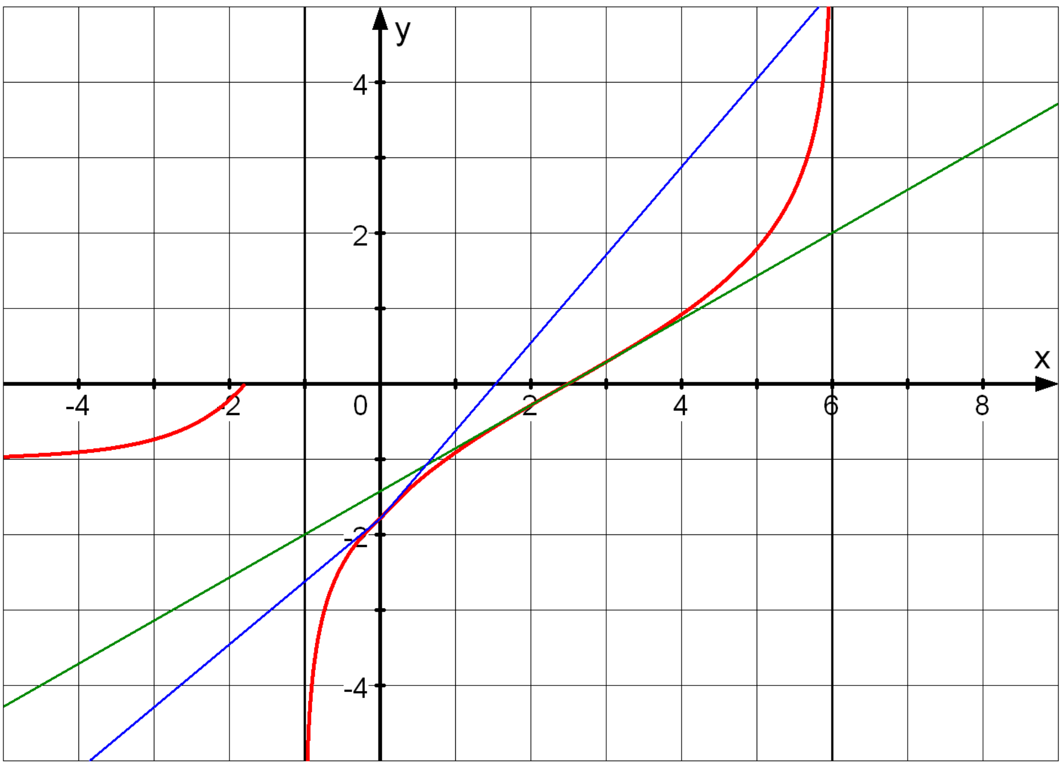
Da p auf]1; 2,5[streng monon steigend ist, ist f ' auf diesem Intervall streng monton fallend und f daher rechtsgekrümmt.

Analog folgt, dass f auf]2,5; 6[linksgekrümmt ist.

Damit ist $W\left(2{,}5;\ 0\right)$ einziger Wendepunkt in]0; 6.

---

5. $f(5) = \ln 6$ und $f'(2{,}5) = \frac{4}{7}$



---

6. a) $y = \ln\frac{x+1}{6+x} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x+1}{6+x} \quad \Leftrightarrow \quad 6e^y + xe^y = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1-6e^y}{e^y-1}$

$$g^{-1}(x) = \frac{1-6e^x}{e^x-1} = \frac{1-e^x-5e^x}{e^x-1} = \frac{1-e^x}{e^x-1} - \frac{5e^x}{e^x-1}$$

b) ----

---

7. $\mathfrak{A}_1(k) = \int\limits_k^{-\ln 6} (-1 - \frac{5e^x}{e^x-1} - 1)dx = \left[-5\cdot\ln\left|e^x-1\right|\right]_k^{-\ln 6} =$

$$= -5\cdot\ln\frac{5}{6} + 5\cdot\ln\left|e^k-1\right| \to 5\cdot\ln\frac{6}{5} \text{ für } k \to -\infty$$

$$\mathfrak{A} = 5\cdot\ln\frac{6}{5} + \ln 6$$