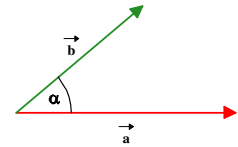


1. Rechnen mit Vektoren

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$



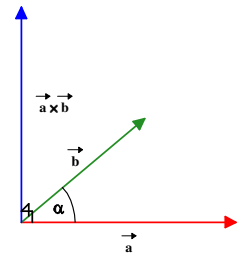
1. **Betrag** (= Länge) eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

2. **Winkel** zwischen 2 Vektoren: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Sonderfall: Ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$



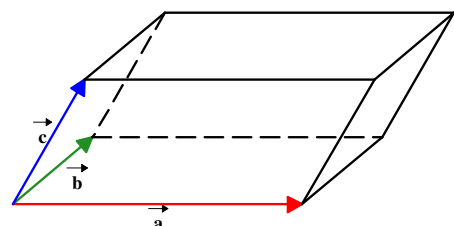
1. **Fächeninhalt** des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms: $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

2. **Fächeninhalt** des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Dreiecks: $A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

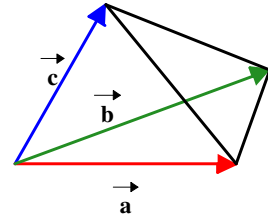
3. **Normalenvektor** einer Ebene

Spatprodukt

1. **Volumen** des Spats: $V_S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



2. **Rauminhalt** des Tetraeders: $V_T = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

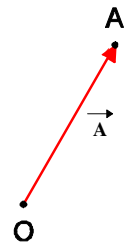


3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind voneinander linear abhängig}$

2. Vektoren und Punkte

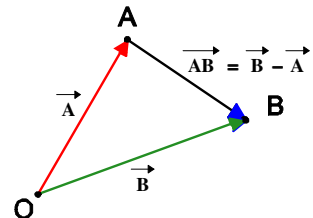
Ortsvektor

Punkt: $A(a_1 | a_2 | a_3)$ Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$



Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten

Verbindungsvektor zweier Punkte: $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$



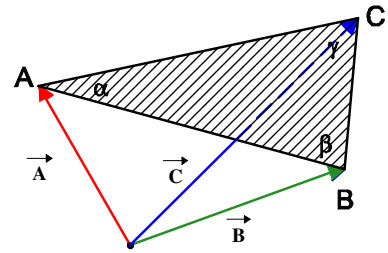
Länge einer Strecke oder Abstand zweier Punkte

$$\overline{AB} = |\vec{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Winkel im Dreieck

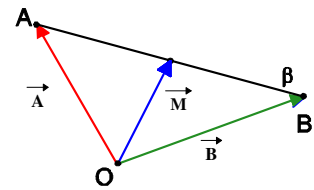
$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \quad \cos\beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}$$



Mittelpunkt einer Strecke

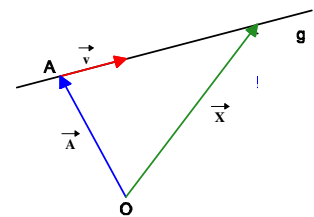
$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$



3. Geraden

Parametergleichung einer Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

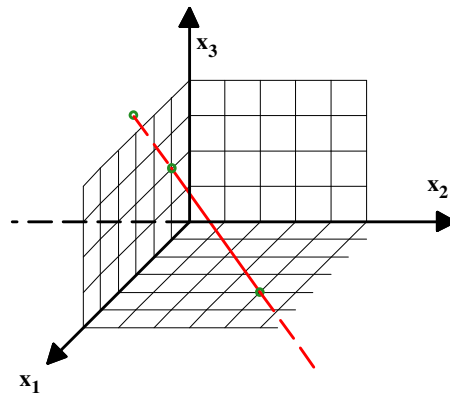


Zeichnerische Darstellung - Spurpunkte

Ein Schnittpunkt einer Geraden mit einer Koordinatenebene heißt **Spurpunkt** in dieser Ebene.

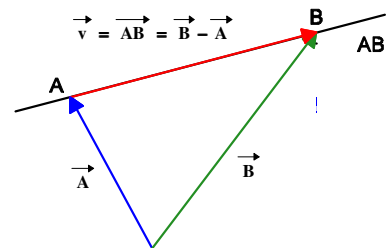
Spurpunkt in der	Bedingung
x_1x_2 -Koordinatenebene	$x_3 = 0$
x_1x_3 -Koordinatenebene	$x_2 = 0$
x_2x_3 -Koordinatenebene	$x_1 = 0$

Existiert kein Spurpunkt mit einer Koordinatenebene; dann ist die Gerade zu dieser Koordinatenebene parallel.



Zweipunkteform

$$AB: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot (\vec{B} - \vec{A})$$



Parallele, sich schneidende und windschiefe Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} \quad h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow g \parallel h$$

Ist zusätzlich $A \in h$, dann sind g und h identisch.

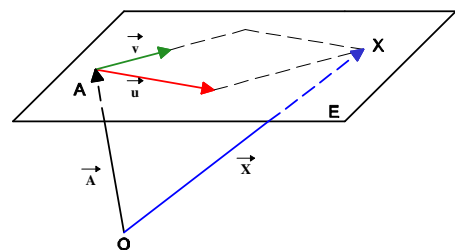
Ansonsten gilt die Schnittpunktsbedingung $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{u}$.

Ist das sich ergebende Gleichungssystem nicht lösbar, dann sind g und h windschief.

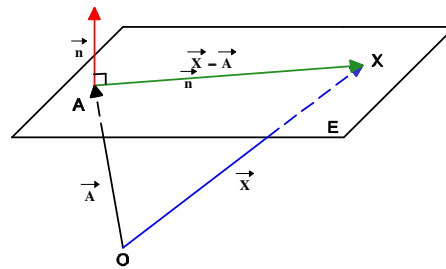
4. Ebenen

Parametergleichung einer Ebene

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



Normalenform einer Ebenengleichung



$$\text{Normalenform: } \vec{n} \cdot \left(\vec{X} - \vec{A} \right) = 0 \Leftrightarrow n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - \underbrace{(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{n_4} = 0$$

Besondere Lagen von Ebenen im Koordinatensystem,

Ebenengleichung	Parallelität zur
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_4 = 0$	x_3 -Koordinatenachse
$n_1x_1 + n_3x_3 + n_4 = 0$	x_2 -Koordinatenachse
$n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$	x_1 -Koordinatenachse
$n_1x_1 + n_4 = 0$	x_2x_3 -Koordinatenebene
$n_2x_2 + n_4 = 0$	x_1x_3 -Koordinatenebene
$n_3x_3 + n_4 = 0$	x_1x_2 -Koordinatenebene

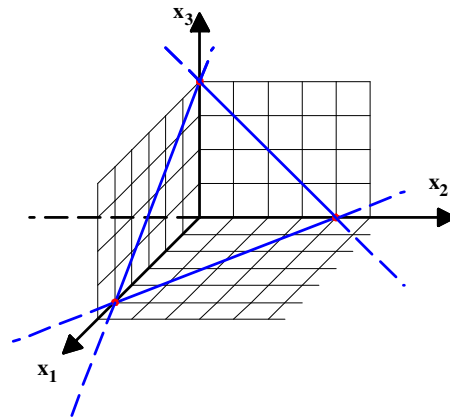
Zeichnerische Darstellung - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen - Spurgeraden

Schnittpunkt mit der	Bedingung
x_1 -Achse	$x_2 = x_3 = 0$
x_2 -Achse	$x_1 = x_3 = 0$
x_3 -Achse	$x_1 = x_2 = 0$

Existiert kein Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse, dann ist die Ebene zu dieser Koordinatenachse parallel. Hat die Ebene mit einer Koordinatenachse mehr als einen Punkt gemeinsam, dann verläuft sie durch diese Achse.

Die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen heißen **Spurgeraden**. Sie sind die Verbindungsgeraden der Spurpunkte.

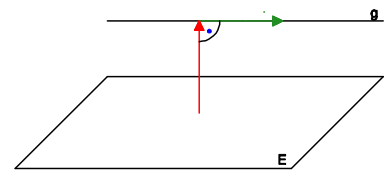
Spurgerade in der	Bedingung
x_1x_2 -Koordinatenebene	$x_3 = 0$
x_1x_3 -Koordinatenebene	$x_2 = 0$
x_2x_3 -Koordinatenebene	$x_1 = 0$



Lagebeziehung zwischen Ebenen und Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad E: \vec{n} \cdot \begin{bmatrix} \vec{X} - \vec{A} \end{bmatrix} = 0$$

$$g \parallel E \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

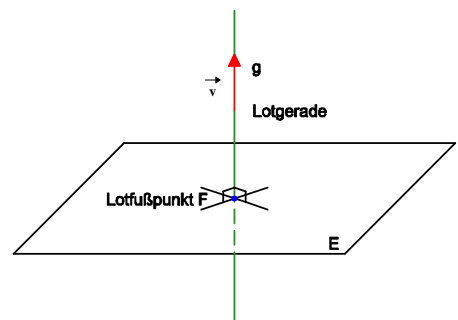


Die Gerade g liegt in der Ebene, wenn zusätzlich ihr Aufpunkt A in E liegt.

Ansonsten erhält man den zum Schnittpunkt gehörenden Parameter durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts in eine Normalenform von E .

Sonderfall:

$$g \perp E \Leftrightarrow \vec{v} = k \cdot \vec{n}$$



Lagebeziehung zwischen Ebenen

Zwei Ebenen E und F mit den Normalenformen

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0 \quad \text{und} \quad F: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4 = 0$$

sind parallel, wenn die Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

Das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{R}$, so dass $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ ist.

Gilt zusätzlich $n_4 = k \cdot m_4$, dann sind die Ebenen identisch.

Ansonsten schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden. Die parametrisierte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} (1) & n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0 \\ (2) & m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ist der allgemeine Geradenpunkt der Schnittgeraden s.}$$

Hessesche Normalenform

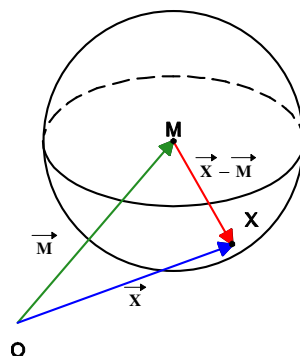
$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4}{\pm \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Setzt man die Koordinaten eines Punktes P in die HNF einer Ebene ein, dann erhält man eine Zahl, deren Betrag gleich dem Abstand des Punktes von der Ebene ist.

Diese Zahl ist positiv, wenn der Punkt auf der dem Ursprung abgewandten Seite von E ist.

Ist sie negativ, dann liegt P auf der Ursprungsseite.

5. Kugel



$$\overline{MX} = r \Leftrightarrow \left(\vec{x} - \vec{m} \right)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

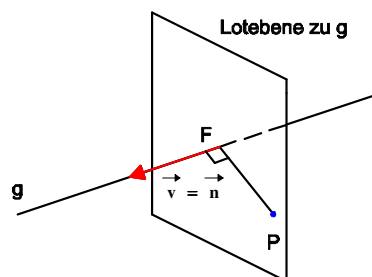
Für die Lage einer Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r zu einer Ebene E gilt

Abstand	Lage
$d(M; E) > r$	Die Ebene E schneidet die Kugel nicht.
$d(M; E) = r$	Die Ebene E berührt die Kugel (Tangentialebene).
$d(M; E) < r$	Die Ebene E schneidet die Kugel in einem Kreis (Schnittkreis)

6. Abstände

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$d(P; g) = \overline{PF}$$



Methode 1:

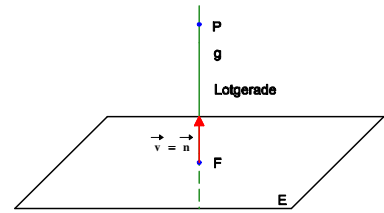
1. Man legt durch P eine Ebene E senkrecht zur Geraden g (der Aufpunkt von E ist P und der Normalenvektor von E ist der Richtungsvektor von g).
2. Der Schnitt von E mit g ist der Lotfußpunkt F.
3. $d(P; g) = |\overrightarrow{PF}|$

Methode 2:

1. Man stellt den Verbindungsvektor \overrightarrow{PX} auf; dabei ist \overrightarrow{X} der Ortsvektor des allgemeinen Geradenpunkts von g.
2. Es gilt $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ mit dem Richtungsvektor \overrightarrow{u} von g. Man erhält den Parameterwert, der den Lotfußpunkt festlegt.
3. $d(P; g) = |\overrightarrow{PF}|$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d(P; E) = \overline{PF}$$



Methode 1:

1. Man legt durch P eine Gerade g senkrecht zur Ebene E (der Aufpunkt von E ist P und der Richtungsvektor von g ist der Normalenvektor von E).

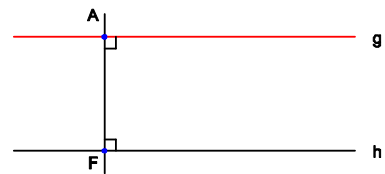
g heißt Lot(gerade) von P auf E.

2. Der Schnitt von g und E ergibt den Lotfußpunkt F.

3. $d(P; E) = |\overrightarrow{PF}|$

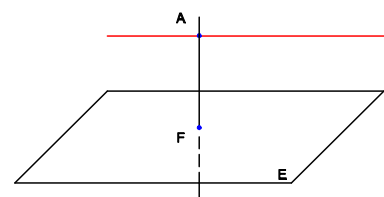
Abstand paralleler Geraden

$$d(g; h) = d(A; h) \text{ mit } A \in g$$



Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene

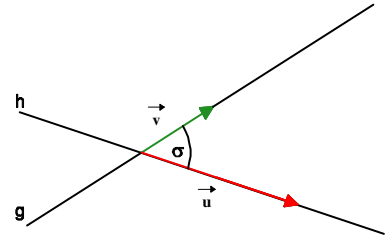
$$d(g; E) = d(A; E) \text{ mit } A \in g$$



7. Winkel

Schnittwinkel sich schneidender bzw. Kreuzungswinkel windschiefer Geraden

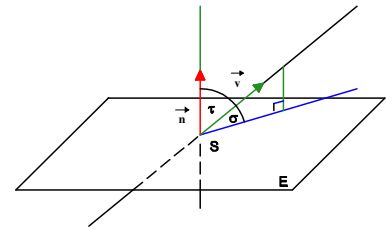
$$\cos\sigma = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} \right|$$



Neigungswinkel bzw. Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene

$\sigma = 90^\circ - \tau$ mit

$$\cos\tau = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} \right|$$

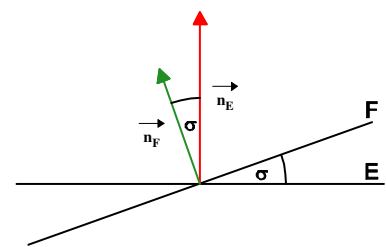


oder

$$\sin\sigma = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} \right|$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos\sigma = \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} \right|$$



Sonderfall: Zueinander senkrechte Ebenen $\sigma = 90^\circ$
