Zufallsgrößen

==

1. Ein Spieler spielt folgendes Glücksspiel :

   Er wirft einen Würfel, bei einer ungeraden Augenzahl verliert er jeweils die Anzahl Augen in Euro. Bei einer 2 oder 6 gewinnt er die Anzahl Augen in Euro, bei einer 4 passiert über haupt nichts.

   X sei sein Gewinn bei einem Wurf mit dem Würfel. Berechnen Sie E(X), Var(X) und die Standardabweichung σ.

---

2. In einer Urne sind 4 grüne und eine rote Kugeln. Man zieht solange eine Kugel ohne Zurücklegen, bis man die rote Kugel gezogen hat.

   X : Anzahl der Züge einschließlich des letzten Zuges

   a) Wahrscheinlichkeitsverteilung!

   b) E(X) und Var(X) !

---

3. Am Zoll stehen 9 Personen an, 4 davon sind Schmuggler. Ein Zöllner bittet von den 9 Personen 3 zur Kontrolle. Alle 3 werden als Schmuggler entlarvt.

   Bestimmen Sie die W'keit für ein derart gutes Ergebnis, wenn die Personen rein zufällig ausgewählt wurden.

3'. In einer Urne befinden sich genau 10 Kugeln, davon 6 rote und 3 weiße Kugeln sowie eine schwarze Kugel.

   a) Der Urne werden ohne Zurücklegen nacheinander 2 Kugeln zufällig entnommen.

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

   A: Die Kugeln haben verschiedene Farben

   B: Die zweite gezogene Kugel ist rot.

   b) Das gleichzeitige Ziehen von drei Kugeln wird wie folgt als Spiel genutzt:

   Der Einsatz beträgt 3 €. Für jede weiße Kugel unter den gezogenen Kugeln werden 2 € ausgezahlt. Die Zufallsgröße X beschreibe den Gewinn oder den Verlust bei diesem Spiel. Ermitteln Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X.

   Untersuchen Sie, ob ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht mit Gewinn oder mit Verlust zu rechnen hat.

   c) Ein Spiel heißt fair, wenn sich auf lange Sicht Gewinn und Verlust ausgleichen.

   Untersuchen Sie, in welchem Verhältnis der Einsatz und der Auszahlungsbetrag bei dem in b) beschriebenen Spiel stehen müssen, damit es als fair gelten kann.

---

4. Ein Würfelspiel verlaufe nach folgenden Regeln:

Zu Beginn zahlt der Spieler einen Euro Einsatz. Dann wird zweimal gewürfelt. Erscheint zweimal die Sechs, so gewinnt der Spieler zehn Euro, erscheint sie genau einmal, so ge winnt er zwei Euro. Andernfalls wird nichts zurückgezahlt.

Wie hoch ist der mittlere Gewinn bzw. Verlust bei diesem Spiel ? Lohnt es sich, das Spiel zu spielen ?

---

5. Ein Student arbeitet aushilfsweise in der Poststelle eines kleinen Unternehmens. An einem Tag muss er Adressaufkleber auf drei vorgefertigte Umschläge kleben.

   Dummerweise sind die Briefumschläge aber schon zugeklebt, so dass er nicht erkennen kann, welcher Adressaufkleber auf welchen Umschlag gehört.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable

   X : Anzahl der korrekt aufgeklebten Adressaufkleber.

---

6. Eine Zufallsgröße kann 5 unterschiedliche Werte annehmen.

   Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, so dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert der Zufallsgröße liegt.

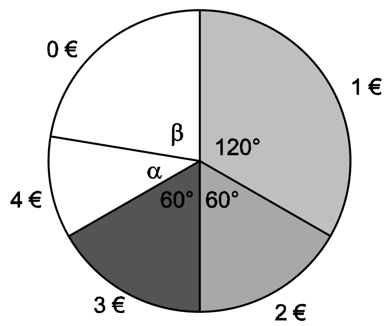
---

7. Eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Wappen erscheint, jedoch höchstens dreimal. Die Anzahl der Würfe bis zum Spielende sei die Zufallsgröße A.

   Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von A.

---

8. In einem Glücksspiel mit einem Glücksrad der abgebildeten Art soll bei einmaligem Drehen der Erwartungswert der Auszahlung 1,50 € betragen.



   Die Auszahlungsbeträge sind jeweils eingetragen.

   a) Berechnen Sie, wie groß dazu die Mittelpunktswinkel der Sektoren gewählt werden müs sen, die zu den Auszahlungen 0 € und 4 € gehören.

   b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Zufallsgröße A : Auszahlung

---

9. Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeit schrift.

   Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfrage pro Woche	0	1	2	3	> 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

   Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Lösungen

==

1.

x	-5	-3	-1	0	2	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x-\mu$	$-\frac{29}{6}$	$-\frac{17}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{37}{6}$

$E(X) = -\frac{1}{6}$ und $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{6}\sqrt{449}$

---

2. a)

a) x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

b) $E(X) = 3$ und $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2}$

---

3. $P(E) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{21}$

3'. a) $P(A) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9} = \frac{19}{30}$

$P(B) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{3}{5}$ Baumdiagramm!

b)

x	0	2	4	6
$P(X=x)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

$E(X) = \frac{9}{5} = 1{,}80$

Also macht der Spieler auf lange Sicht Verlust.

c) Finde Aufgabe nicht exakt formuliert!

4.

x	0	2	10
$P(X=x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \frac{5}{6} < 1$. Es lohnt sich nicht, das Spiel zu spielen.

5.

x	0	1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

---

6. Ansatz für die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	b	b	b	b

$E(X) = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot b + 4 \cdot b + 5 \cdot b = a + 14 \cdot b$

mit $a + 4b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 - 4b$

Eingesetzt ergibt sich $E(X) = 1 + 10b$. Wählt man $b = 0{,}05$, dann erhält man $E(X) = 1{,}5$

7.

a	1	2	3
$a - \mu$	$-0{,}75$	$0{,}25$	$1{,}25$
$P(A = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(A) = 1{,}75$ und $\sigma = \sqrt{Var(A)} = \sqrt{0{,}6875}$

---

8. a) (1) $\alpha + \beta = 180°$ und (2) $4 \cdot \frac{\alpha}{360°} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}50$

ergeben $\alpha = 30°$ und $\beta = 90°$

b)

9.

Einnahme x durch Verkauf	0	2,70	5,40	8,10
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,3	0,2

$E(X) = 4{,}05 > 3{,}90$

Der Verkauf lohnt sich.
