6. Binomialverteilung

==

6.1 Bernoulli-Experimente und Bernoullikette

Betrachtet man bei einem Zufallsexperiment nur die Ereignisse T (Treffer) und $\overline{T}$ (Niete), dann bezeichnet man das Experiment als ***Bernoulli-Experiment***.

Beispiele:

a) Glücksspiel : Treffer - Niete

b) Wahlumfrage : Wähler - Nichtwähler

c) Elektronisches Bauteil : defekt - nicht defekt

Bemerkung :

Ist $P(T) = p$ die Trefferwahrscheinlichkeit eines Bernoulli-Experiments,

dann ist $P(\overline{T}) = 1 - p = q$

Beispiel :

Experiment : Werfen eines L-Würfels

Treffer : $T = \{6\}$ Niete : $\overline{T} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Dann ist $p = P(T) = \frac{1}{6}$ sowie $q = 1 - p = 1 - P(\overline{T}) = \frac{5}{6}$

Viele Experimente bestehen aus der mehrmaligen Ausführung eines Bernoulli-Experiments.

Die n-malige Ausführung eines Bernoulli-Experiments heißt ***Bernoullikette*** der Länge n, wenn gilt

1. Bei jeder Durchführung des Bernoulli-Experiments ist $P(T) = p$ und $P(\overline{T}) = q = 1 - p$.
2. Die Ereignisse T_i : Treffer bei der i.ten Durchführung des Experiments, $1 \le i \le n$, sind voneinander unabhängig.

Beispiel:

$$\Omega = \left\{ TTT,\ TT\overline{T},\ T\overline{T}T,\ \overline{T}TT,\ T\overline{TT},\ \overline{T}T\overline{T},\ \overline{TT}t,\ \overline{TTT} \right\}$$

ist die Ergebnismenge einer Bernoullikette der Länge 3.

6.2 Die Bernoullische Formel

Ist X die Anzahl der Treffer bei einer Bernoullikette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p, dann ist $W_X = \left\{ 0;\ 1;\ \ldots\ldots\ ;\ n \right\}$, und die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erzielen, ist gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{P(X=k) = B(n;\ p;\ k) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k}}} \text{ mit } 0 \le k \le n \text{ und } q = 1 - p$$

Bemerkungen und Beispiele:

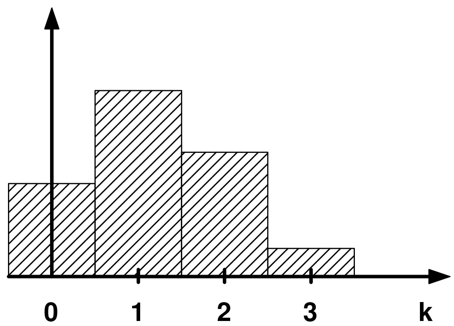
a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Trefferzahl X einer Bernoullikette der Länge n und mit der Trefferwahrscheinlichkeit p bezeichnetet man als ***Binomialverteilung B(n; p)***.

X heißt ***binomialverteilt***.

Binomialverteilung B(3; 0,4) :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Histogrammdarstellung :



b) Die Werte von B(n;p) finden sich für bestimmte n und p in der **Stochastiktabelle**.

c) Ein Laplace - Würfel wird 20mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A: Genau zweimal Augenzahl 2

B: Höchstens zweimal Augenzahl 2

C: Mindestens zweimal Augenzahl 2

D: Genau zweimal Augenzahl 2, aber weder beim ersten noch beim letzten Wurf

E: Genau einmal Augenzahl 2 bei den ersten 10 Würfen und dreimal Augenzahl 3 bei den letzten 10 Würfen.

F: Genau zweimal Augenzahl 2, aber nicht hintereinander

sind

$$P(A) = B(20; \frac{1}{6}; 2) = \binom{20}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{18} \approx 19{,}8\%$$

$$P(B) = B(20; \frac{1}{6}; 0) + B(20; \frac{1}{6}; 1) + B(20; \frac{1}{6}; 2) \approx 32{,}9\%$$

$$B(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - B(20; \frac{1}{6}; 0) - B(20; \frac{1}{6}; 1) \approx 13{,}0\%$$

$$P(D) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot B\left(18; \frac{1}{6}; 2\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \binom{18}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \approx 16{,}0\%$$

$$P(E) = B\left(10; \frac{1}{6}; 2\right) \cdot B\left(10; \frac{1}{6}; 3\right) \approx 4{,}5\%$$

$$P(F) = \binom{19}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}019\%$$

d) ***Mindestlänge einer Bernoulli-Kette***

Wie oft muss man einen L-Würfel **mindestens** werfen, um mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit **mindestens** eine 1 zu würfeln ?

Lösung :

Bedingung : $P(X \geq 1) > 0{,}9$

Gegenereignis : $1 - P(X=0) > 0{,}9$

Umformung : $P(X=0) < 0{,}1$

Bernoullische Formel : $\binom{n}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^n < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{5}{6})^n < 0{,}1$

Logarithmieren : $n \cdot \ln\frac{5}{6} > \ln 0{,}1$

Auflösen : $n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad n > 12$

Der Würfel muss also mindestens 27 mal geworfen werden.

Allgemein gilt :

Um bei einer Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p mit einer Wahrscheinlichkeit größer als α, $0 < \alpha < 1$, mindestens einen Treffer erzielen, muss für Länge n der Bernoullikette gelten

$$\boxed{\mathbf{n > \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}}}$$

e) Mindestwahrscheinlichkeit

Wie groß muss der Anteil roter Kugeln in einer Urne mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit bei 10 Ziehungen mit Zurücklegen mindestens eine rote Kugel zu ziehen, größer als 99% ist ?

Lösung :

Bedingung : $P(X \geq 1) > 0{,}99$

Gegenereignis und Umformung : $P(X=0) < 0{,}01$

Bernoullische Formel : $(1-p)^{10} < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1 - \sqrt[10]{0{,}01} \approx 0{,}37$ (aufgerundet)

Der Anteil muss mindestens 37% betragen.

Um bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als α, $0 < \alpha < 1$, mindestens einen Treffer erzielen, muss für die Trefferwahrscheinlichkeit p gelten

$$\boxed{\mathbf{p > 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}}}$$

Beispiel 4 (Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen) :

In einer Urne sind 3 rote und 6 weiße Kugeln. Es wird 5mal mit Zurücklegen gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A : Zwei oder drei Kugeln rot

B : Mindestens eine der gezogen Kugeln ist rot und mindestens eine ist weiß

Lösung :

$$P(A) = B(5; \frac{1}{3}; 2) + B(5; \frac{1}{3}; 3) = \binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 + \binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 \approx 49{,}4\%$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - B(5; \frac{1}{3}; 0) - B(5; \frac{2}{3}; 0) \approx 13{,}6$$

6.3 Die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

Sei X die Trefferanzahl einer Bernoullikette B(n; p). Ist

$$\mathbf{F_p^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F_p^n : x \to P(X \le x)}$$

die zugehörige Verteilungsfunktion , dann gilt

$$\boxed{\mathbf{F_p^n(k) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \quad , 0 \le k \le n \, , k \in \mathbb{N}}}$$

Die Verteilungsfunktion dient zur Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten. Es gilt

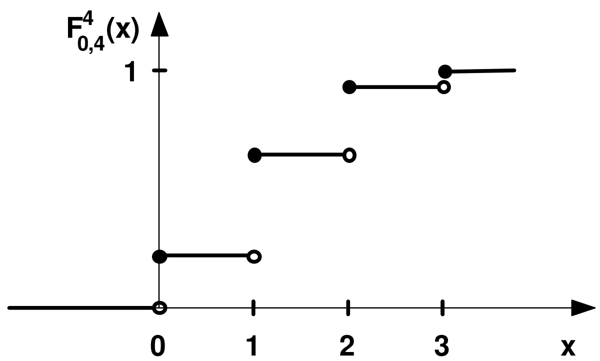
Ereignis	Berechnung mit der Verteilungsfunktion
E : Höchstens k Treffer	$\mathbf{P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = F_p^n(k)}$
E : Weniger als k Treffer	$\mathbf{P(X < k) = P(X \leq k-1) = F_p^n(k-1)}$
E : : Mehr als k Treffer	$\mathbf{P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - F_p^n(k)}$
E : Mindestens k Treffer	$\mathbf{P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - F_p^n(k-1)}$
E : Mindestens k_1 Treffer und höchstens k_2 Treffe	$\mathbf{P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1) =}$ $\mathbf{= F_p^n(k_2) - F_p^n(k_1 - 1)}$

Bemerkungen und Beispiele :

a) Für häufig gebrauchte n und p-Werte finden sich die Werte von F_p^n in der Stochastiktabelle.

b) Der Graph der Verteilungsfunktion F_p^n ist eine Treppenkurve

Für $F_{0,4}^4$ erhält man



Beispiel 1 :

Experiment :Ein L-Würfel wird 100mal geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sechs

a) weniger als 10mal

b) mehr als 20mal

c) mehr als 10 und höchstens 20mal

nach oben zu liegen kommt ?

Lösung :

a) $P(X < 10) = P(X \leq 9) = F_{\frac{1}{6}}^{100}(9) \approx 2{,}1\ \%$

b) $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - F_{1/6}^{100} \approx 1 - 0{,}84811 \approx 15{,}2\%$

c) $P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) \approx 0{,}84811 - 0{,}02129 \approx 82{,}7\ \%$

Beispiel 2 :

Ein L-Tetraeder wird 100mal geworfen.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Stochastiktabelle ein möglichst kleines Intervall der Form $\left[0;\, k\right]$ bzw. $\left[25 - k\!:\, 25 + k\right]$, in dem mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der geworfenen Einsen liegt.

Lösung :

Es muss gelten $P(25 - k \leq X \leq 25 + k) > 0{,}90 \Leftrightarrow F_{0,25}^{100}(25 + k) - F_{0,25}^{100}(25 - k - 1) > 0{,}90$

Die Lösung bestimmt man mit Hilfe der Stochastiktabelle.

p / k	0,25	
17	**0,03762**	
18	0,06301	
19	0,09953	
20	0,14883	
21	0,21144	Aus der Stochastiktabelle entnimmt man $k_{min} = 7$ mit
22	0,28637	
23	0,37108	$P(18 \le X \le 32) = F_{0,25}^{100}(32) - F_{0,25}^{100}(17) = 0,95540 - 0,03763 \approx 91,8\%$
24	0,46167	
25	**0,55347**	
26	0,64174	Damit liegt mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Einsen im Intervall $[18; 32]$..
27	0,72238	
28	0,79246	
29	0,85046	
30	0,89621	
31	0,93065	
32	**0,95540**	

Aufgabe aus der Handreichung

Geheimdiplomat Ernst muss dringend eine Krisenregion verlassen. Dazu stehen zwei nicht besonders gut gewartete Flugzeuge zur Verfügung: Die zweimotorige "Alpha" und die viermotorige "Beta".

Alpha fliegt noch, wenn nur ein Motor läuft. Beta benötigt mindestens zwei Motoren, um sich in der Luft zu halten. Vereinfachend wird angenommen, dass jeder einzelne Motor mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausfällt, die der zuständige Mechaniker recht gut angeben kann.

Untersuchen Sie, bei welchen Angaben des Mechanikers sich Ernst für "Alpha" entscheiden sollte.

Lösung

Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Motors sei p.

A: "Alpha" stürzt nicht ab

B: "Beta" stürzt nicht ab

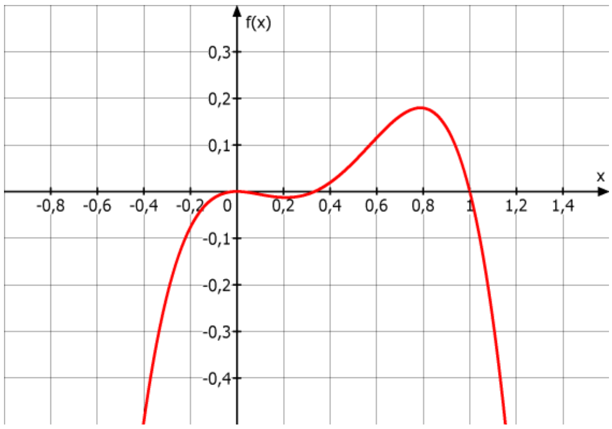
$$P(A) = P(X \le 1) = q^2 + 2pq$$

$$P(B) = P(X \le 2) = q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2$$

Setzt man $p = x$ und damit $q = 1 - x$ dann ergibt sich mit der Funktion

$$f(x) = P(A) - P(B) = x^2 - 2x\cdot(1-x) - x^4 - 4x^3\cdot(1-x) - 6x^2\cdot(1-x)^2$$

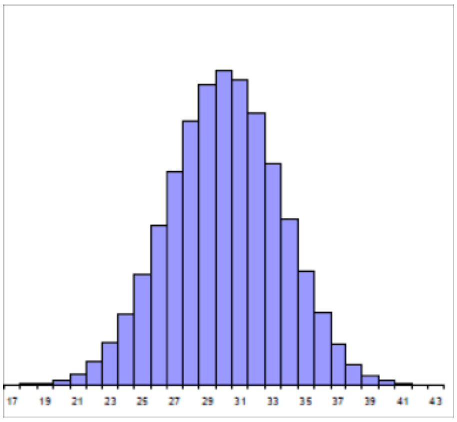
$$f(x) > 0 \rightarrow A \text{ und } f(x) < 0 \rightarrow B \text{ für } 0 < x < 1$$



Diese offene Aufgabe ist nur näherungsweise lösbar,

Aufgabe aus der Handreichung

Die nebenstehende Graphik gibt das Histogramm einer nach B(n; p) verteilten Zufallsgröße wieder.



Welche der drei angegebenen Verteilungen passt zu dem Histogramm?

Machen Sie Ihre Entscheidung plausibel.

i) $B\left(40; 0{,}75\right)$ ii) $B\left(60; \frac{2}{3}\right)$

iii) $B\left(60; 0{,}6\right)$

Lösung

$B\left(40; 0{,}75\right)$ passt zum Histogramm. Begründung: Erwartungswert

---