

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit

3.1 Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Sind A und B zwei Ereignisse, dann nennt man das Schema

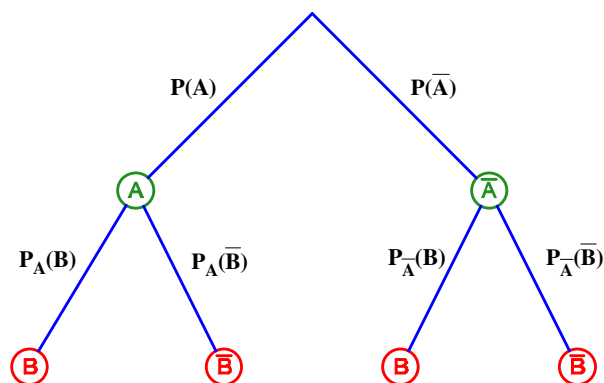
	B	\bar{B}	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Vierfeldertafel für diese beiden Ereignisse.

Für die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ des Eintretens von B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist, ist dann gegeben durch

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Der Sachverhalt lässt sich mit einem Baumdiagramm darstellen.



1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines durch einen Pfad dargestellten UND-Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Man nennt diese Wahrscheinlichkeiten auch Pfadwahrscheinlichkeiten.

2. Pfadregel

Die totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der für das Ereignis günstigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$$

Baumdiagramm eignen sich auch zur Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsexperimenten und der Ermittlung ihrer Ergebnismenge sowie zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln.

3.2 Formel von Bayes

Ist $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A, dann gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ und } P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$$

und damit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)} \quad \text{Formel von Bayes}$$

3.3 Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B werden als voneinander unabhängig bezeichnet, wenn das Eintreten von A keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B und umgekehrt hat d.h.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zwei Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig, wenn die Multiplikationsformel

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt. Andernfalls heißen sie abhängig voneinander.

Wenn A und B voneinander unabhängig sind,

dann sind dies auch A und \bar{B} , \bar{A} und B sowie \bar{A} und \bar{B}
