2. Laplace-Experimente und Zählprinzip

===

2.1 Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge $\Omega = \left\{\omega_1, \ldots., \omega_n\right\}$

heißt ***Laplace-Experiment***, wenn alle einelementigen Ereignisse $\{\omega_i\}$, $1 \le i \le n$, gleich wahrscheinlich sind d.h.

$$P\left(\{\omega_1\}\right) = P\left(\{\omega_2\}\right) = \ldots. = P\left(\{\omega_n\}\right)$$

p heißt ***Elementarwahrscheinlichkeit***.

Es gilt dann

$$\boxed{p = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}}$$

Für ein Ereignis A, das aus k Ergebnissen besteht, gilt dann

$$\boxed{\mathbf{P(A) = k \cdot p = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}}}$$

also

$$\boxed{\mathbf{P(A) = \frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}}}$$

$$\boxed{\textbf{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A} = \frac{\textbf{Anzahl der in A liegenden Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}}$$

2.2 Prinzip vom Ein- und Ausschluss

Sind M und N zwei Mengen mit $|M| = m$ bzw. $|N| = n$ Elementen, dann gilt

$$\boxed{|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|}$$

Beispiele:

1. Wie viele der ersten 1000 natürlichen Zahlen

   a) sind durch 2, durch 3 bzw. durch 5 teilbar ?

   b) sind durch 2 oder 3 teilbar ?

   c) sind durch 2 oder 3 oder 5 teilbar ?

   d) sind durch 2 oder 3, aber nicht durch 5 teilbar ?

   e) sind entweder durch 2 oder 3 teilbar ?

   f) sind entweder durch 2 oder 3 oder 5 teilbar ?

Lösung:

1. a) $1000 : 2 = 500 \quad \Rightarrow \quad |V_2| = 500$

$$1000 : 3 = 333\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad |V_3| = 333$$

$$1000 : 5 = 200 \quad \Rightarrow \quad |V_5| = 200$$

b) $|V_2 \cup V_3| = |V_2| + |V_3| - |V_2 \cap V_3| = |V_2| + |V_3| - |V_6| =$

$$= 500 + 333 - 166 = 667$$

c) $|V_2 \cup V_3 \cup V_5| = |V_1 \cup V_3| + |V_5| - |(V_2 \cup V_3) \cap V_5| =$

$$= |V_2| + |V_3| - |V_2 \cap V_3| - |(V_2 \cap V_5) \cup (V_3 \cap V_5)| =$$

$$= |V_2| + |V_3| - |V_2 \cap V_3| - \Big[|V_2 \cap V_3| + |V_3 \cap V_5| - |V_2 \cap V_3 \cap V_5| \Big] =$$

$$= |V_2| + |V_3| + |V_5| - |V_6| - |V_{10}| - |V_{15}| + |V_{30}| =$$

$= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$

d) $|(V_2 \cup V_3) \cap V_5| = |V_2 \cup V_3| - |V_2 \cap V_5| - |V_2 \cap V_5| + |V_2 \cap V_3 \cap V_3| =$

$= 667 - 100 - 66 + 33 = 534$

e) $|(V_2 \cap \overline{V_3}) \cup (\overline{V_2} \cap V_3)| = |V_2 \cup V_3| - |V_2 \cap V_3| = 667 - 166 = 501$

2.3 Produktregel bzw. Zählprizip

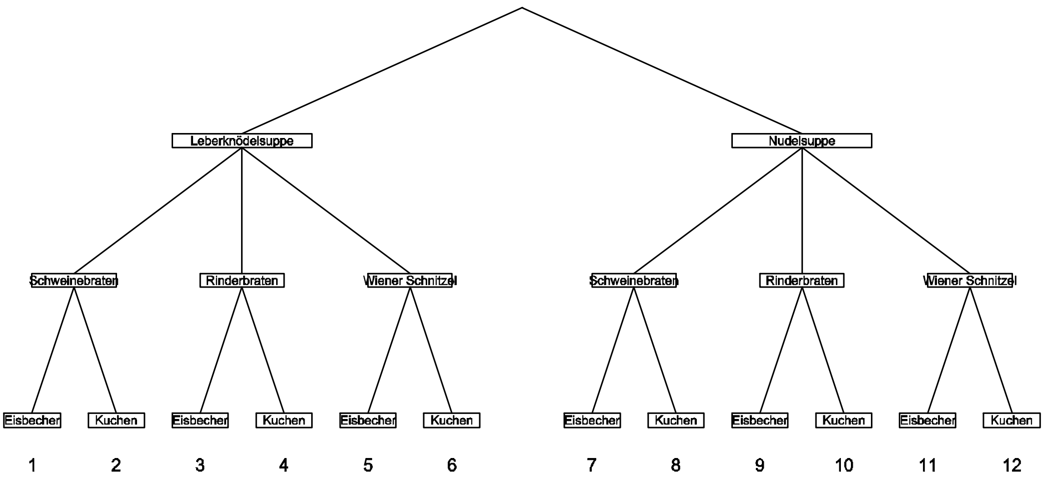
Beispiel:

Ein Restaurant bietet als Vorspeise eine Leberknödelsuppe oder eine Nudelsuppe an.

Als Hauptgericht stehen Schweinebraten, Rinderbraten oder Wiener Schnitzel zur Auswahl.

Als Nachtisch kann man zwischen einem Eisbecher oder einem Stück Kuchen wählen.

Auswahlbaum



Es lassen sich $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ verschiedene dreigängige Menüs zusammenstellen.

Lassen sich die Elemente einer Menge mit einem Auswahlbaum bestimmen, dann ist die Anzahl der Elemente dieser Menge gleich dem Produkt der jeweiligen Auswahlmöglichkeiten.

Beispiele:

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Gruppe von 8 Frauen und 6 Männern ein gemischtes Doppel auszuwählen ?

2.Ein roter, ein grüner und blauer Würfel werden geworfen.

Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich?

3. Eine Multiple-Choice-Test besteht aus 20 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten auf eine Frage.

Wie viele verschiedene Antwortmöglichkeiten gibt es ?

4. Wie viele verschiedene gerade dreistellige Zahlen gibt es?

5. Wie viele verschiedene 7-stellige Palindrome gibt es ?

6. Wie viele Teiler besitzt die Zahl 500?

7. Wie viele verschiedene 5-stellige Zahlen enthalten mindestens ein 5?

8. Wie viele verschiedene 5-stellige Zahlen enthalten mindestens einmal die Ziffer 0 ?

9. Wie viele verschiedene 5-stellige Zahlen bestehen aus lauter verschiedenen Ziffern ?

Folgerung:

Es gibt

$n! := n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (spricht n Fakultät)

Möglichkeiten, n verschiedene Dinge in einer Reihe anzuordnen.

Speziell gilt : $0! = 1! = 1$

Beispiele:

Wie viele Möglichkeiten gib es 3 Geometriebücher, 4 Algebrabücher und 5 Analysisbücher nebeneinander in ein Bücherregal zu stellen, wenn

a) die Anordnung beliebig sein kann ?

b) die Bücher so angeordnet werden solle, dass Bücher, die zum gleichen Teilgebiet der Mathematik gehören, nebeneinander stehen sollen ?

Wie viele Möglichkeiten gibt es 4 Frauen und 4 Männer in einer Reihe aufzustellen, wenn

a) die Aufstellung keinen Einschränkungen unterworfen ist ?

b) Frau A nicht neben Frau B stehen möchte ?

c) kein Mann neben einem Mann und keine Frau neben einer Frau stehen soll ?

d) die Frauen nebeneinander stehen sollen ?

e) jede Frau mit einem Mann verheiratet ist und verheiratete Paare nebeneinander stehen sollen ?

Wie viele verschiedene 7-stellige Zahlern gibt es, die viermal die Ziffer 1 und dreimal die Ziffer 2 enthalten?

Es gibt

$$\frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot .... \cdot n_k!}$$

verschiedene Möglichkeiten n_1, n_2, ..., n_k jeweils nicht unterscheidbare Objekte in einer Reihe anzuordnen.

Es gibt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ (sprich "k aus n"}$$

verschiedene Möglichkeiten k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen.

$\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient. Speziell ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$