**Stammfunktionen und unbestimmtes Integral**

==================================================================

1. ***Integration linear tranformierter Funktionen***

a) Bestimme:

i) $\int e^{2x-1}dx$ ii) $\int \frac{1}{0{,}5x+1}dx$ iii) $\int \sin(4x+\frac{\pi}{2})dx$

b) Begründe:

Ist die Funktion F(x) eine Stammfunktion der Funktion f(x), dann ist $\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)$ eine Stammfunktion von $f(ax+b)$.

---

2. ***Integration verknüpfte Funktionen***

a) Bestimme

i) $\int 2x\cdot e^{x^2}dx$ ii) $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}dx$ iii) $\int \frac{1}{x^2}\cdot(\frac{1}{x}-1)^4dx$

b) Begründe:

Ist die Funktion F(x) eine Stammfunktion der Funktion f(x),

dann ist F[g(x)] eine Stammfunktion von f [g(x)]·g'(x)

---

3. ***Logarithmische Integration***

a) Berechne

i) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ ii) $\int \frac{1}{2x+1}dx$ iii) $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx$

b) Begründe:

Gilt für die f die Arstellung $f(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ mit $h(x) \neq 0$,

dann ist die Funktion F mit $F(x) = \ln|h(x)|$ ein Stammfunktion von f.

---

4. Gib eine Stammfunktion von f bzw. $f_a$ an.

a) $f : x \to f(x) = -\frac{3}{4x^2}$

b) $f_a : x \to f_a(x) = ax\cdot(2x-5)$

c) $f_a : x \to f_a(x) = \sin(3-\frac{2}{a}x)$

d) $f : x \to f(x) = 8\cdot\cos(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})$

e) $f : x \to f(x) = \left(\frac{1}{2}x+2\right)^6$

f) $f_a : x \to f_a(x) = \frac{-3}{(ax+1)^2}$

g) $f : x \to f(x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt{4x-5}}$

h) $f : x \to f(x) = \frac{x-2}{x^2}$

i) $f : x \to f(x) = 2\cdot e^{2x-1}$

j) $f : x \to f(x) = x+e^{1-x}$

k) $f_a : x \to f_a(x) = 10a\cdot e^{-a^2x+1}$

l) $f : x \to f(x) = e^x\cdot(1-e^x)$

m) $f : x \to f(x) = (e^x+e^{-x})^2$

n) $f : x \to f(x) = 80\cdot(1-e^{-0{,}05x})$

o) $f_a : x \to f_a(x) = \frac{-4}{(ax+1)^3}$

p) $f : x \to f(x) = \frac{3}{2-x}$

q) $f_a : x \to f_a(x) = \frac{8x-a}{3x^2}$

r) $f : x \to f(x) = \sqrt{2x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

s) $f : x \to f(x) = \frac{e^x}{2e^x+1}$

t) $f : x \to f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

u) $f : x \to f(x) = x\cdot(x^2+1)^4$

v) $f : x \to f(x) = \frac{\ln x}{x}$

w) $f : x \to f(x) = \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}$

x) $f : x \to f(x) = \sin x\cdot\sqrt{\cos x+1}$

y) $f : x \to f(x) = \frac{x^3}{2x^4+1}$

z) $f : x \to f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln x}$

---

5. Zeige, dass die Funktion F mit $F(x) = \sin x - x\cdot\cos x$ eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x\cdot\sin x$ ist.

---

6. Bestimme eine Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P\left(1 \mid 2\right)$ geht.

a) $f : x \to f(x) = \frac{3x-2}{4x}$ b) $f : x \to f(x) = 2\cdot\sin(\pi x)$ c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

---

**Berechnung von Flächeninhalten**

==============================================================

1. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f : x \to f(x) = x^2 - 4$ mit den Koordinatenachsen und der Geraden

   a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 3$

   eingeschlossen wird.

---

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird.

   a) $f : x \to f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ b) $f : x \to f(x) = -(x-3)^2 + 4$

   c) $f : x \to f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ d) $f : x \to f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$

---

3. a) Berechne den Inhalt der Fläche, die vnm Graphen der Funktionen $f : x \to f(x) = 4 - x^2$ und $h : x \to h(x) = (x+1)^2 - 1$ begrenzt wird.

   b) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \to fF(x) = x^2 - 1$ und der Geraden $g : y = 5 - x$ begrenzt wird.

   c) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \to (x) = x^2 - x$, der Geraden $g : y = 4 - x$ und der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt wird.

---

4. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist durch $f_a : x \to f_a(x) = \sin(ax)$ eine Funktion gegeben.

   Der Graph der Funktion $f_a$ schließt schließt mit der x-Achse zwischen dem Ursprung und der kleinsten positiven Nullstelle von $f_a$ eine Fläche mit der x-Achse ein.

   Für welchen Wert von a hat diese Fläche den Inhalt 2?

---

5. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u > 2$ begrenzen eine Fläche.

   Bestimme u so, dass der Inhalt dieser Fläche gleich 1 ist.

---

6. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4x-4}{x}$ mit dem Graphen G.

   a) Berechne in Abhängigkeit von u den Inhalt A(u) der Fläche, die von G, der waagrechten Asymptote von G und den Geraden $x = 1$ und $x = u$ mit $u > 1$ eingeschlossen wird.

   b) Für welchen Wert von u hat diese Fläche den Inhalt 10 ?

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

7. Berechne dasVerhältnis, in dem dieWinkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten die Fläche, teilt, die der Graph von $f : x \to f(x) = 4 - x^2$ mit de x-Achse einschließt!

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

8. Untersuche, ob die unendlich ausgedehnte Fläche, die der Graph der Funktion f im 1.Quadranten mit der x-Achse und der Geraden $x = 1$ einschließt, einen endlichen Inhalt besitzt.

   a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{3}{0{,}5x + 1}$

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

9. Untersuche, ob die bis ins Unendliche reichende die Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ im 1.Quadranten mit der x-Achse und der Geraden $x = 1$ einschließt, einen endlichen Inhalt besitzt.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

10. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist durch $f_a : x \to f_a(x) = a - x^2$ eine Funktion gegeben, deren Graph mit der x-Achse eine Fläche einschließt.

    Bestimme a so, dass diese Fläche den Inhalt 10 hat.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

11. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen G der Funktion f mit $f(x) = \frac{5}{x} - 1$, der Tangente an G an der Stelle $x = 1$ und der x-Achse begrenzt wird.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

12. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen G der Funktion f mit $f(x) = x + \frac{2}{x}$ und der Normalen zu G an der Stelle $x = 2$ begrenzt wird.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

13. Untersuche den Inhalt der nach links ins Unendliche reichenden Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \to f(x) = 1 + e^{0{,}5x}$, der waagrechten Asymptote des Graphen und der Geraden $x = -2$ begrenzt wird.

---

**Modellierung**

==================================================================

1. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$, die x-Achse und die waagrechte Asymptote des Graphen von f sowie die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzen eine Fläche (alle Koordinatenin Meter).

   Diese Fläche stellt die Seitenansicht eines 2 m breiten und 8 m langen Brückenpfeilers aus Beton dar.

   Welche Masse hat der Brückenpfeiler, wenn ein $dm^3$ Beton die Masse 2,3 kg hat?

---

**Stammfunktionen und unbestimmtes Integral**

==================================================================

1. ***Integration linear tranformierter Funktionen***

i) $\int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2x-1} + C$

ii) $\int \frac{1}{0{,}5x+1}dx = 2\cdot\ln|0{,}5x+1| + C$

iii) $\int \sin(4x+\frac{\pi}{2})dx = -\frac{1}{4}\cdot\cos(4x+\frac{\pi}{2}) + C$

b) $\left[\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$

---

2. ***Integration verknüpfte Funktionen***

a) i) $\int 2x\cdot e^{x^2}dx = e^{x^2+C}$

ii) $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}dx = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2} + C$

iii) $\int \frac{1}{x^2}\cdot(\frac{1}{x}-1)^4 dx = -\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{x}-1)^5 + C$

b) $\left[F[g(x)]\right]' = f\,[g(x)]\cdot g'(x)$

---

3. ***Logarithmische Integration***

a) i) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + C$

ii) $\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\ln|2x+1| + C$

iii) $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(2e^x+1) + C$

b) Kettenregel!

---

4. Gib eine Stammfunktion von f bzw. $f_a$ an.

a) $f(x) = -\frac{3}{4x^2} = -\frac{3}{4}x^{-2} \Rightarrow F(x) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{3}{4}x^{-1} = \frac{3}{4x}$

b) $f_a(x) = ax\cdot(2x-5) = 2ax^2 - 5ax \Rightarrow F_a(x) = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{5}{2}ax^2$

c) $f_a(x) = \sin(3-\frac{2}{a}x) \Rightarrow F_a(x) = -\cos(3-\frac{2}{a}x)\cdot(-\frac{a}{2}) = \frac{a}{2}\cdot\cos(3-\frac{2}{a}x)$

d) $f(x) = 8\cdot\cos(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow F(x) = 8\cdot\sin(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{3}\cdot\sin(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x+2\right)^6 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}x+2\right)^7\cdot 2 = \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}x+2\right)^7$

f) $f_a(x) = \frac{-3}{(ax+1)^2} = -3\cdot(ax+1)^{-2} \Rightarrow F_a(x) = -3\cdot(ax+1)^{-1}\cdot\frac{1}{a} = -\frac{3}{a}\cdot(ax+1)^{-1}$

g) $f(x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt{4x-5}} = \frac{2}{3}\cdot(4x-5)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{(4x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\cdot(4x-5)^{\frac{1}{2}}$

h) $f(x) = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x} - 2x^{-2} \Rightarrow F(x) = \ln|x| + 2x^{-1} = \ln|x| + \frac{2}{x}$

i) $f(x) = 2\cdot e^{2x-1} \Rightarrow F(x) = 2\cdot e^{2x-1}\cdot\frac{1}{2} = e^{2x-1}$

j) $f : x \to f(x) = x + e^{1-x}$

k) $f_a(x) = 10a\cdot e^{-a^2x+1} \Rightarrow F_a(x) = 10a\cdot e^{-a^2x+1}\cdot(-\frac{1}{a^2}) = -\frac{10}{a}\cdot e^{-a^2x+1}$

l) $f(x) = e^x\cdot(1-e^x) = e^x - e^{2x} \Rightarrow F(x) = e^x - e^{2x}\cdot(-\frac{1}{2}) = e^x + \frac{1}{2}\cdot e^{2x}$

m) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\cdot e^x + 2x - \frac{1}{2}\cdot e^{-2x}$

n) $f(x) = 80\cdot(1-e^{-0,05x}) = 80 - 80\cdot e^{-0,05x} \Rightarrow F(x) = 80x - 89\cdot e^{-0,05x}\cdot\frac{1}{-0,05}$

$= 80x + 1600 \cdot e^{-0,05x}$

o) $f_a(x) = \dfrac{-4}{(ax+1)^3} = -4 \cdot (ax+1)^{-3} \Rightarrow F_a(x) = -4 \cdot \dfrac{(ax+1)^{-2}}{-2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{8}{a} \cdot (ax+1)^{-2}$

p) $f(x) = \dfrac{3}{2-x} \Rightarrow F(x) = 3 \cdot \ln|2-x| \cdot \dfrac{1}{-1} = -3 \cdot \ln|2-x|$

q) $f_a(x) = \dfrac{8x-a}{3x^2} = \dfrac{8}{3x} - \dfrac{a}{3x^2} = \dfrac{8}{3x} - \dfrac{a}{3} \cdot x^{-2} \Rightarrow F_a(x) = \dfrac{8}{3} \cdot \ln|x| + \dfrac{8}{3} x^{-1}$

r) $f(x) = \sqrt{2x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = (2x)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \dfrac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3} \cdot (2x)^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

s) $f(x) = \dfrac{e^x}{2e^x+1} \Rightarrow F(x) = \ln(2e^x+1) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \ln(2e^x+1)$

t) $f : x \to f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = e^x \cdot (e^x+1)^{-2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{(e^x+1)^{-1}}{-1} = \dfrac{-1}{e^x+1}$

u) $f : x \to f(x) = x \cdot (x^2+1)^4 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x^2+1)^5}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10} \cdot (x^2+1)^5$

v) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot \ln x \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$

w) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x + 1}}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot (\ln x + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} \cdot (\ln x + 1)^{\frac{3}{2}}$

x) $f(x) = \sin x \cdot \sqrt{\cos x + 1} = \sin x \cdot (\cos x + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$F(x) = \dfrac{(\cos x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot (-1) = -\dfrac{2}{3} \cdot (\cos x + 1)^{\frac{3}{2}}$

y) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^4+1} \Rightarrow F(x) = \ln(2x^4+1) \cdot \dfrac{1}{8}$

z) $f : x \to f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \Rightarrow F(x) = \ln|\ln x|$

---

5. Zeige, dass die Funktion F mit $F(x) = \sin x - x \cdot \cos x$ eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin x$ ist.

---

6. Bestimme eine Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P\left(1 \mid 2\right)$ geht.

   a) $f: x \to f(x) = \frac{3x-2}{4x}$ b) $f: x \to f(x) = 2\cdot\sin(\pi x)$ c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

---

**Berechnung von Flächeninhalten - Lösungen**

===

1. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f: x \to f(x) = x^2 - 4$ mit den Koordinatenachsen und der Geraden

   a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 3$

   eingeschlossen wird.

**Aufgabe 1**

$$\int_0^1 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{11}{3}$$

$$\int_0^2 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_2^3 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_2^3 = (9-12) - (\frac{8}{3} - 8) = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad A_3 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

---

**Aufgabe 2**

a) Nullstellen: $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \lor x = 2$

$$\int_0^2 (2 - \frac{1}{2}x^2) = \left[2x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad A = 2\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

b) $f: x \to f(x) = -(x-3)^2 + 4$

   Nullstellen: $f(x) = -(x-3)^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \lor x = 5$

$$\int_3^5 [-(x-3)^2+4]dx = \left[-\frac{1}{3}(x-3)^3+4x\right]_3^5 = \left(-\frac{8}{3}+20\right) - \left(0+12\right) = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

c) Nullstellen : $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4{,}5 \vee x = 3$

$$\int_{-4,5}^{3} (-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2})dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_{-4,5}^{3} = 23{,}4375$$

d) $f : x \to f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$

Nullstellen: $x = 0 \vee x = 3$

$$\int_0^3 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^3 = \frac{27}{8}$$

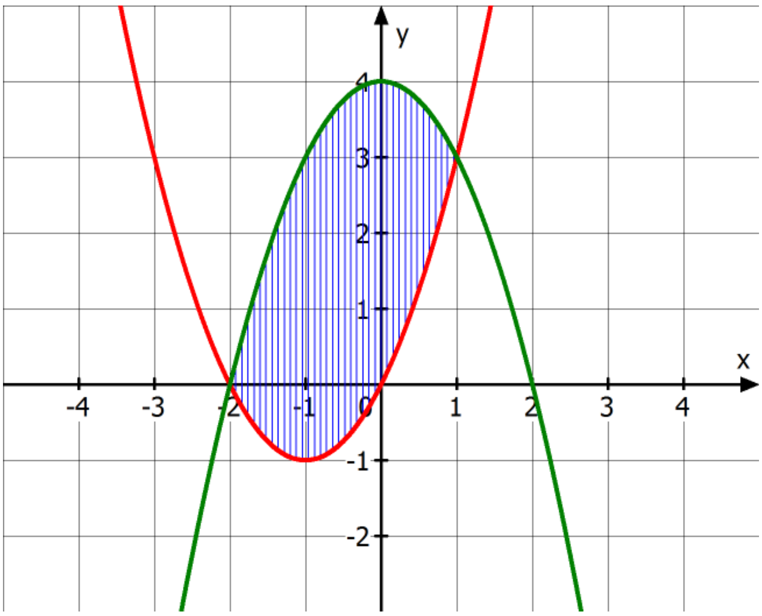
---

**Aufgabe 3**

a) Schnittstellen: $f(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad 4-x^2 = (x+1)^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 1$

$f(x)-h(x) = (4-x^2)-[(x+1)^2-1] = 5-x^2-(x+1)^2 = 4-2x^2-2x$

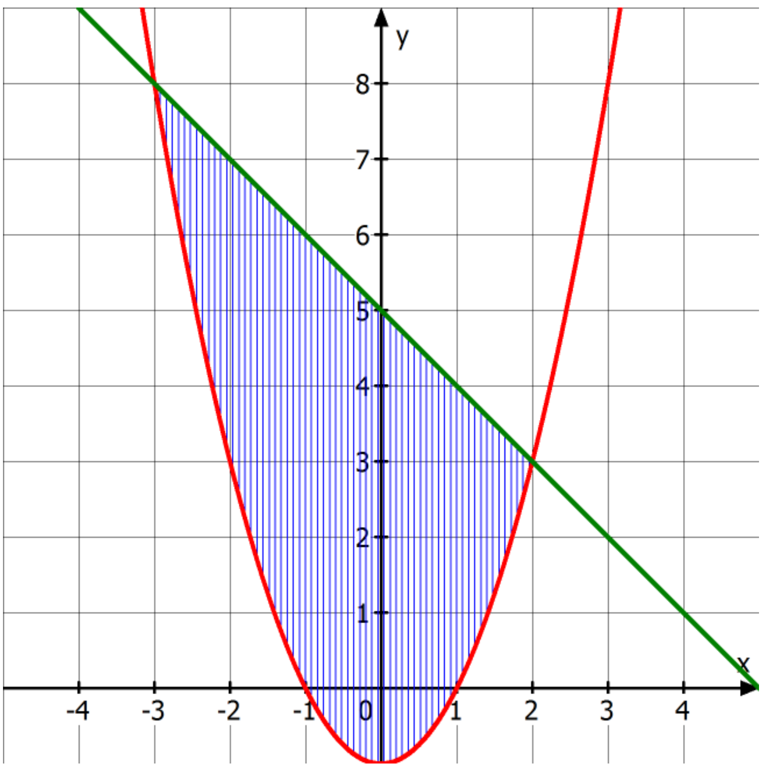
$$\int_{-2}^{1} (4-2x^2-2x)dx = \left[4x - \frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{3} + \frac{20}{3} = 9$$



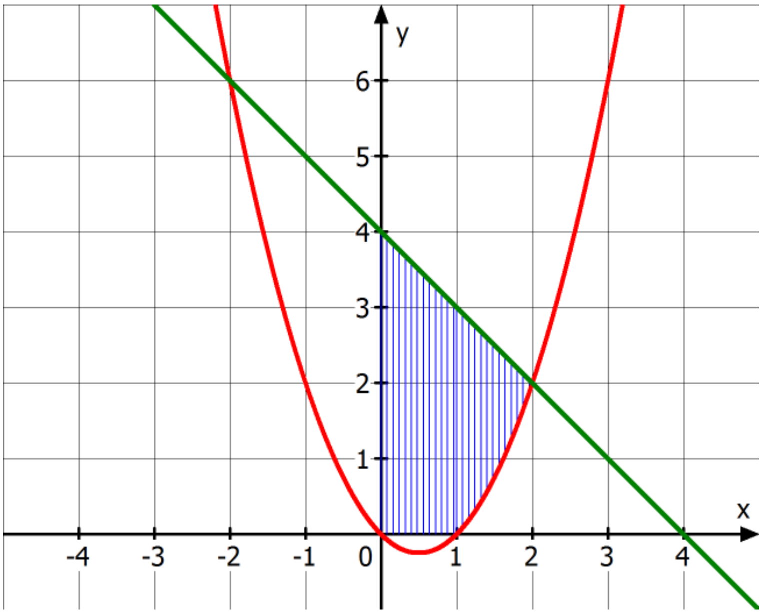

a) Schnittstellen: $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = 2$

$f(x) - g(x) = x^2 + x - 6$

$$\int_{-3}^{2} (x^2 + x - 6)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right]_{-3}^{2} = -\frac{125}{6} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{125}{6}$$



c)




Schnittstellen: $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x = 4 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$

$f(x) - g(x) = x^2 - 4$

$$\int_1^2 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_1^2 = -\frac{5}{3} \qquad A = \frac{1}{2}\cdot(4+3)\cdot 1 + \frac{5}{3} = \frac{31}{6}$$

---

**Aufgabe 4**

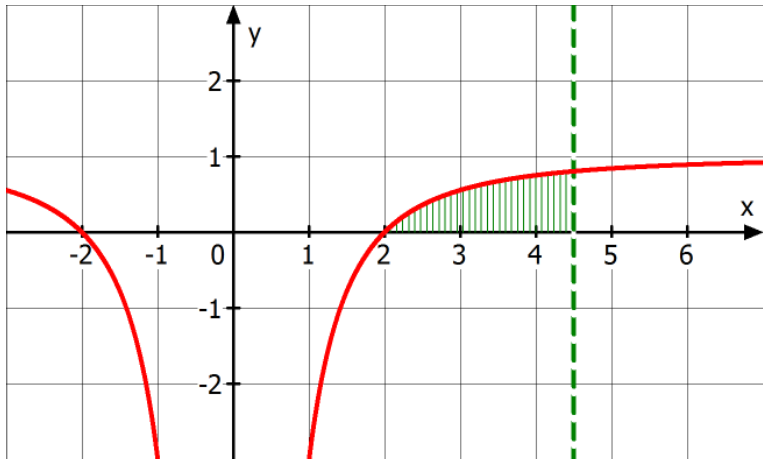
Kleinste positive Nullstelle: $\sin(ax) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{a}$

$$A(a)) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)dx = \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = -\frac{1}{a}\cos\pi + \frac{1}{a}\cos 0 = \ = \frac{2}{a}$$

Bedingung: $\frac{2}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

---

**Aufgabe 5**




$$A(u) = \int_2^u (1 - \frac{4}{x^2})dx = \left[ x + \frac{4}{x} \right]_2^u = (u + \frac{4}{u}) - (2+2) = u + \frac{4}{u} - 4$$

Bedingung:

$$A(u) = u + \frac{4}{u} - 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 5u + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 4 \vee \left( u = 1 < 2 \right)$$

---

**Aufgabe 6**

a) Waagrechte Asymptote: $y = a(x) = 4$

$$a(x) - f(x) = \frac{4}{x}$$

$$A(u) = \int_1^u \frac{4}{x}dx = \left[ 4 \cdot \ln x \right]_1^u = 4 \cdot \ln u$$

b) $A(u) = 4 \cdot \ln u = 10 \quad \Rightarrow \quad u = e^{2,5}$

---

**Aufgabe 7**

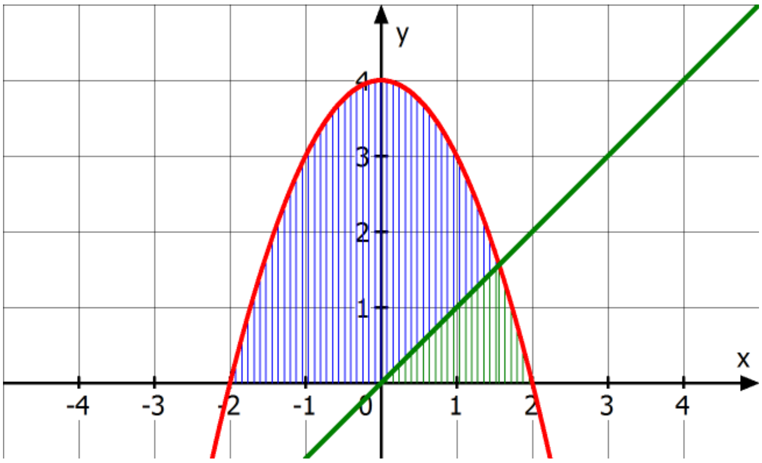
$$\int_0^2 (4 - x^2)dx = \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Positive Schnittstelle: $4 - x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$$f(x) - x = 4 - x - x^2$$

$$\int_0^{x_0}(4-x-x^2dx = \left[4x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{x_0} = 4x_0-\frac{1}{2}x_0{}^2-\frac{1}{3}x_0{}^3 \approx 3{,}76$$

$$\frac{A_1}{A_2} \approx \frac{\frac{16}{3}+1{,}76}{\frac{16}{3}-1{,}76} \approx \frac{5{,}77}{1}$$

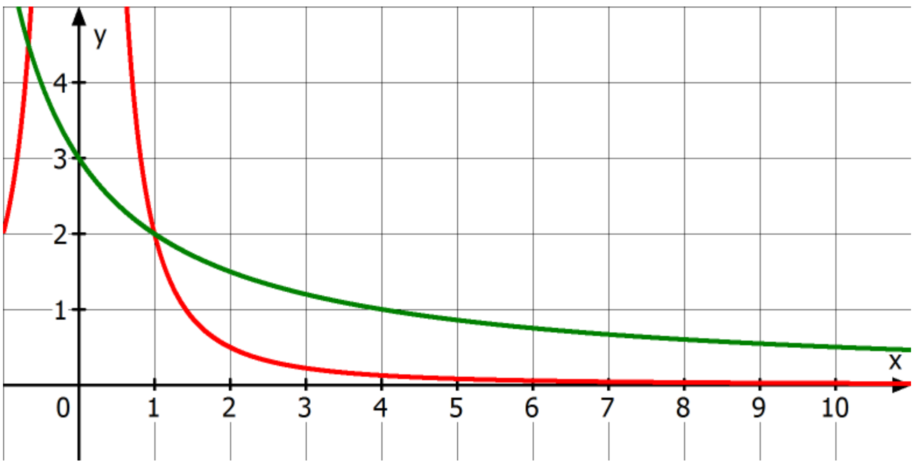



---

**Aufgabe 8**

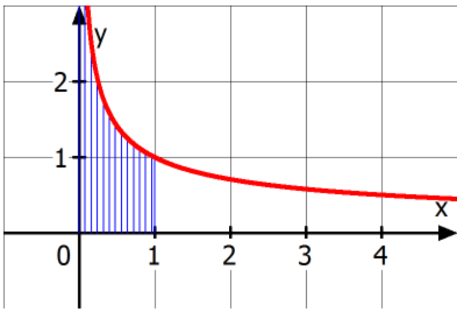
a) $A(u) = \int_1^u \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^u = -\frac{2}{u}+2 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{u\to\infty} A(u) = 2$

b) $A(u) = \int_1^u \frac{3}{0{,}5x+1}dx = \left[2\cdot\ln(0{,}5x+1)\right]_1^u = 2\cdot\ln(0{,}5u+1)-2\cdot\ln 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{u\to\infty} A(u) = \infty$




---

**Aufgabe 9**




$$A(u) = \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_u^1 = 2 - 2\sqrt{u} \qquad \lim_{u \to 0} A(u) = 2$$

---

**Aufgabe 10**

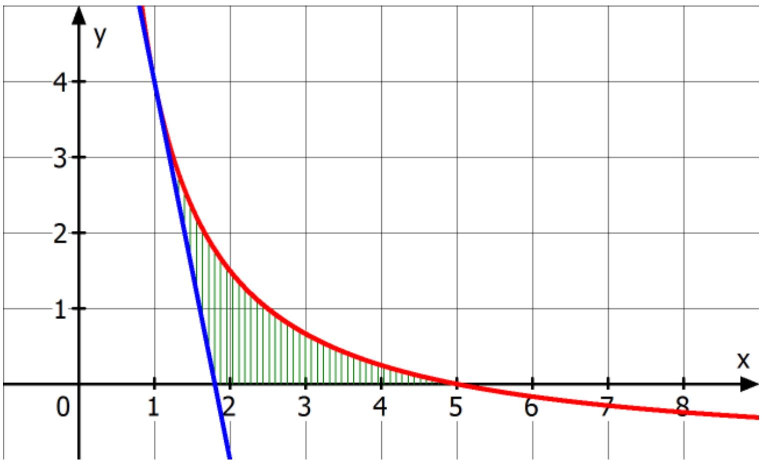
Nullstellen: $f_a(x) = a - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}$

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)dx = \left[ax - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{1}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad A(a) = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

Bedingung: $\frac{4}{3}a\sqrt{a} = 10 \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{a} = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{225}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{225}{4}}$

---

**Aufgabe 11**




Tangentengleichung: $y = -5x + 9$

Schnittstelle mit der x-Achse: $x = 1{,}8$

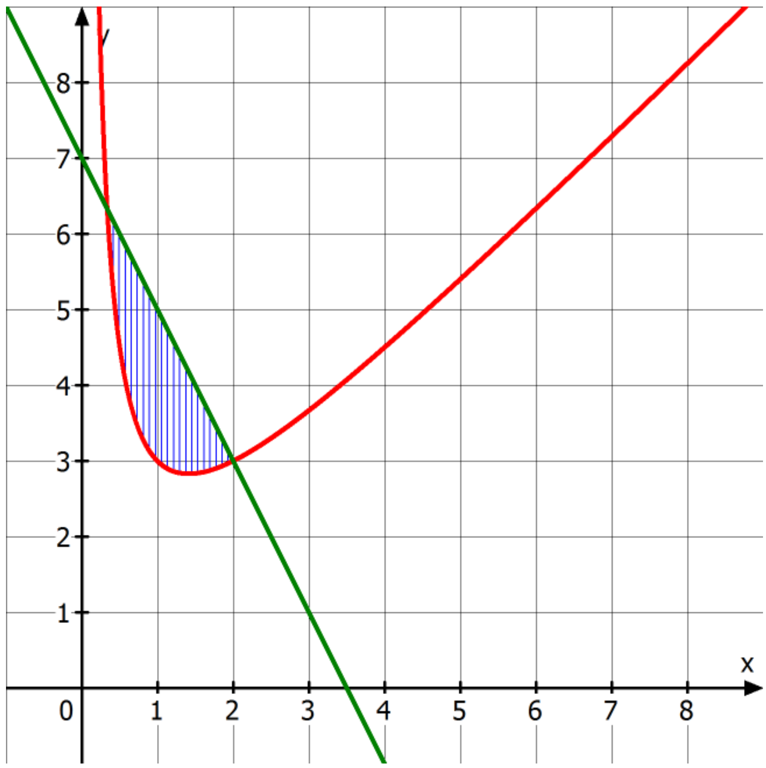
$$\int_1^5 \left(\frac{5}{x} - 1\right) = \left[5 \cdot \ln x - x\right]_1^5 = (5 \cdot \ln 5 - 5) - (5 \cdot \ln 1 - 1) = 5 \cdot \ln 5 - 4$$

Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 4 = 1{,}6$

Gesuchte Fläche: $A = 5 \cdot \ln 5 - 5{,}6$

---

**Aufgabe 12**




Normale: $y = -2x + 7$

Schnitstellen: $x = \frac{1}{3} \vee x = 2$

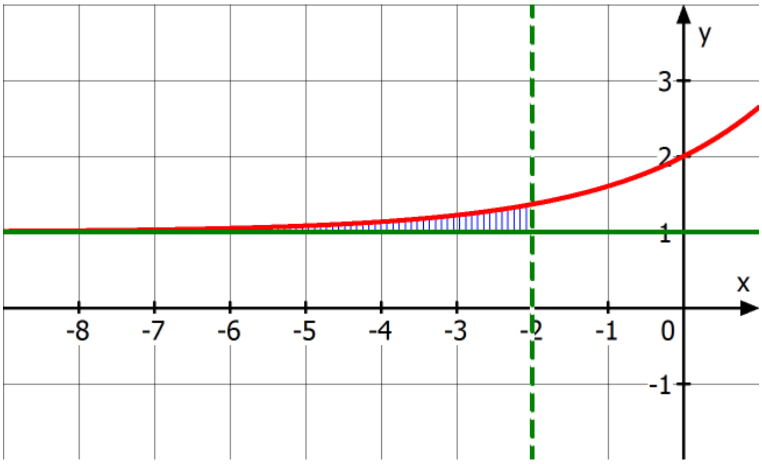
$f(x) - n(x) = 3x + \frac{2}{x} - 7$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{2} (3x + \frac{2}{x} - 7)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 2 \cdot \ln x - 7x\right]_{\frac{1}{3}}^{2} = \left[6 + 2 \cdot \ln 2 - 14\right] - \left[\frac{1}{6} + 2 \cdot \ln\frac{1}{3} - \frac{7}{3}\right] = -\frac{35}{6} + 2 \cdot \ln 6$$

$A = \frac{35}{6} - 2 \cdot \ln 6$

---

**Aufgabe 13**




Asymptote: $y = a(x) = 1$

$f(x) - a(x) = e^{0,5x}$

$$A(u) = \int_u^{-2} e^{0,5x}dx = \left[2 \cdot e^{0,5x}\right]_u^{-2} = 2 \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{0,5u} \quad \Rightarrow \quad \lim_{u \to \infty} A(u) = \frac{2}{e}$$

---

**Modellierung**

===================================================================

1. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$, die x-Achse und die waagrechte Asymptote des Graphen von f sowie die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzen eine Fläche (alle Koordinaten in Meter).

   Diese Fläche stellt die Seitenansicht eines 2 m breiten und 8 m langen Brückenpfeilers aus Beton dar.

   Welche Masse hat der Brückenpfeiler, wenn ein $dm^3$ Beton die Masse 2,3 kg hat?

---