Steckbriefaufgaben

---

1. Bestimme die ganzrationale Funktion 2. Grades, deren Graph bei -1 die x-Achse schneidet und den Tiefpunkt $T\left(0{,}5 \mid -2{,}25\right)$ besitzt.

---

2. Bestimme die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph den Wendepunkt $W\left(0 \mid 1\right)$ besitzt und den Hochpunkt $H\left(1 \mid 2\right)$ hat.

---

3. Bestimme die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph den Terrassenpunkt $S\left(-1 \mid -\frac{1}{3}\right)$ besitzt und durch den Koordinatenursprung geht.

---

4. Bestimme die ganzrationale Funktion kleinsten Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft und den Terrassenpunkt $S\left(1 \mid 1\right)$ besitzt.

---

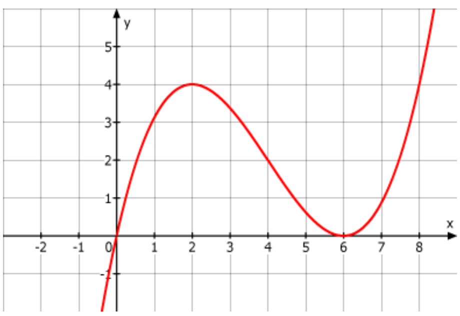
5. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{bx}$ berührt die Gerade $y = mx$ im Punkt $P\left(2 \mid 1\right)$. Bestimme den Funktionsterm f(x).

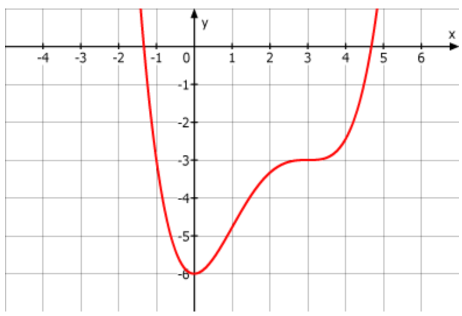
---

6. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{bx}$ berührt die Gerade $y = 2x - 1$ an der Stelle $x = 1$. Bestimme den Funktionsterm f(x).

---

7. Die Bilder zeigen die Graphen zweier ganzrationaler Funktion 3. bzw. 4. Grades.



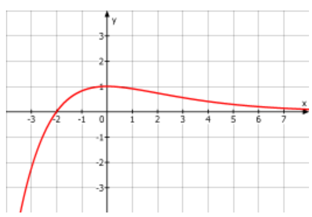


Bestimme ihr Funktionsgleichungen.

---

8. Dass Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = (ax + b) \cdot e^{cx}$. Bestimme a, b und c.



Lösungen

==

Aufgabe 1

f

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b$

Bedingungen:

(1) $f(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a - b + c = 0$

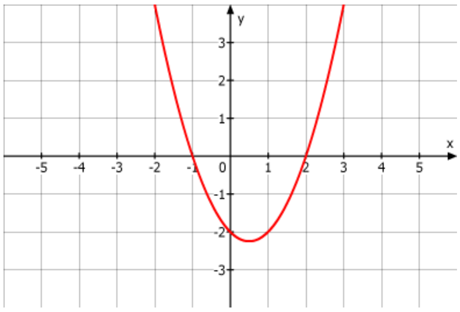
(2) $f(0{,}5) = -2{,}25 \quad \Rightarrow \quad 0{,}25a + 0{,}5b + c = -2{,}25$

(3) $f'(0{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$

Aus dem Gleichungsystem ergibt sich $a = 1$, $b = -1$ und $c = -2$

Eleganter ist der Ansatz: $f(x) = a\cdot(x - 0{,}5)^2 - 2{,}25$

$0 = a\cdot(-1 - 0{,}5)^2 - 2{,}25 \quad \Rightarrow \quad a = 1$



Aufgabe 2

Ansatz

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen

(1) $f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 1$

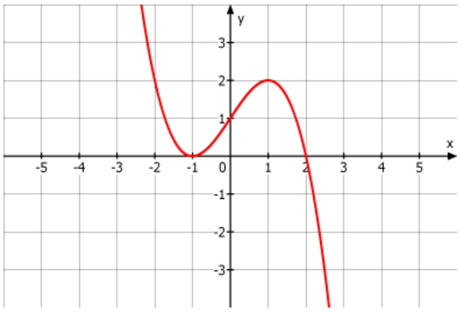
(2) $f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 2$

(3) $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0$

(4) $f''(0) = 0 \qquad 2b = 0$

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{3}{2}$ und $d = 1$.

Wegen $f''(1) = -3 < 0$ ist $H\left(1 \mid 2\right)$ tatsächlich ein Hochpunkt.



Aufgabe 3

Ansatz

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen

(1) $f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad d = 0$

(2) $f(-1) = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad -a + b - c = -\frac{1}{3}$

(3) $f'(-1) = 0 \qquad \Rightarrow \quad 3a - 2b + c = 0$

(4) $f''(-1) = 0 \qquad\quad -6a + 2b = 0$

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = 1$ und $d = 0$.

Aufgabe 4

Ansatz:

$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 20ax^2 + 6bx$

Bedingungen:

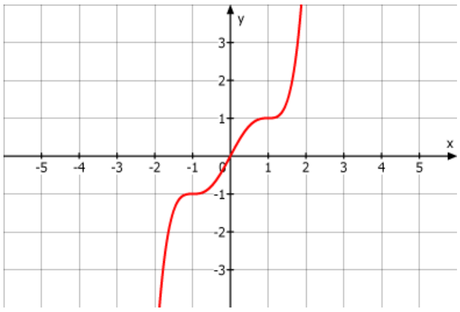
(1) $f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 1$

(2) $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5a + 3b + c = 0$

(3) $f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20a + 6b = 0$

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich $a = \frac{3}{8}$, $b = -\frac{5}{4}$ und $c = \frac{15}{8}$.

Es ist $f'''(1) \neq 0$ und damit ist S tatsächlich ein Terrassenpunkt.



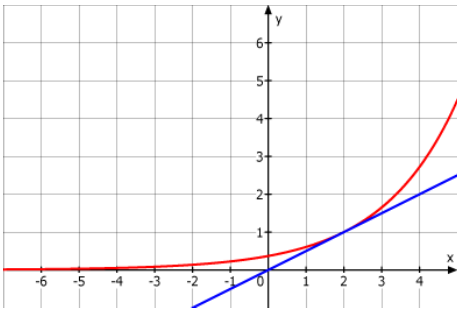
Aufgabe 5

$f(x) = a \cdot e^{bx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ab \cdot e^{bx}$

(1) $f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot e^{2b} = 1$

(2) $f'(2) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad ab \cdot e^{2b} = \frac{1}{2}$

Durch beidseitige Division ehält man $b = \frac{1}{2}$ und durch Einsetzen $a = \frac{1}{e}$.



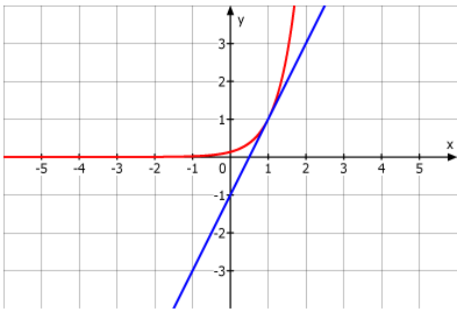
Aufgabe 6

$f(x) = a \cdot 2^{bx} \quad \Rightarrow \quad f'x) = ab \cdot e^{bx}$

(1) $f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot e^{b} = 1$

(2) $f'(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad ab \cdot e^{b} = 2$

Daraus ergibt sich $a = \frac{1}{e^2}$ und $b = 2$. Also $f(x) = \frac{1}{e^2} \cdot e^{2x} = e^{2x-2}$.



Aufgabe 7

Ansatz: $f(x) = ax \cdot (x-6)^2$

$H(2\,|\,4)$ eingesetzt ergibt $4 = 2a \cdot (2-4)^4 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8}$.

Ansatz:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \;\Rightarrow\; f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \;\Rightarrow\; f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Bedingungen:

(1) $f(0) = -6 \;\Rightarrow\; e = -6$

(2) $f'(0) = 0 \;\Rightarrow\; d = 0$

(3) $f(3) = -3 \;\Rightarrow\; 81a + 27b + 9c - 6 = -3 \;\Rightarrow\; 27a + 9b + 3c = 1$

(4) $f'(3) = 0 \;\Rightarrow\; 108a + 27b + 6c = 0$

(5) $f''(3) = 0 \;\Rightarrow\; 108a + 18a + 2c = 0$

Das Gleichungssystem ergibt $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{8}{9}$ und $c = 2$ sowie $e = -6$

Aufgabe 8

$f(x) = (ax+b) \cdot e^{cx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot e^{cx} + (ax+b) \cdot e^{cx} \cdot c$

(1) $f(-2) = 0 \;\Rightarrow\; (-2a+b) \cdot e^{-2c} = 0 \;\Rightarrow\; -2a + b = 0$

(2) $f(0) = 1 \;\Rightarrow\; b = 1$

(3) $f'0) = 0 \;\Rightarrow\; a + bc = 0$

Es ergibt sich $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und $c = -\frac{1}{2}$.

Man meist nach, dass $H\left(0 \mid 1\right)$ ein Hochpunkt ist und damit ergibt sich $f(x) = (\frac{1}{2}x+1)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

Straßenangleichung (Lambacher Schweizer 11 S. 199 Nr. 8)

==

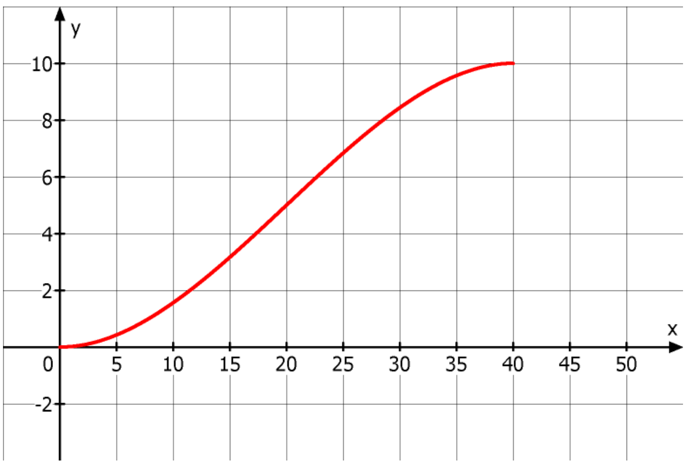
a) Angleichung durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3.Ordnung durch den Tiefpunkt $A\left(0 \mid 0\right)$ und den Hochpunkt $B\left(40 \mid 10\right)$.

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

(1) $f(40) = 10 \;\Rightarrow\; 64000a + 1600b = 10$

(2) $f'(40) = 0 \;\Rightarrow\; 4800a + 80b = 0$

$a = -\frac{1}{3200}$ und $b = \frac{3}{160}$



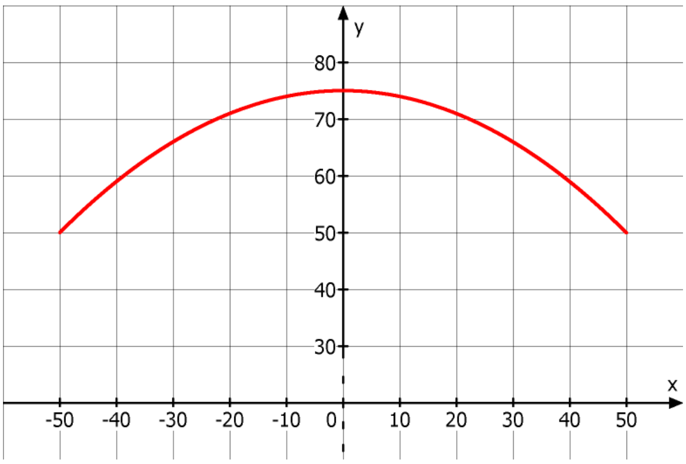
b) Angleichung durch den Graphen einer nach unten geöffneten Parabel durch den Punkt $B\left(50 \mid 50\right)$ mit der Steigung $m = -1$ in diesem Punkt.

Ansatz: $f(x) = ax^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax$

(1) $f(50) = 50 \quad \Rightarrow \; 2500a + b = 50$

(2) $f'(50) = -1 \;\Rightarrow\; -100a = -1$

$a = -\frac{1}{100}$ und $b = 75$



b) Angleichung durch den Graphen einer nach unten geöffneten Parabel durch den Punkt $B\left(50 \mid 50\right)$ mit der Steigung $m = -1$ in diesem Punkt.

Ansatz: $f(x) = ax^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax$

(1) $f(50) = 50 \quad \Rightarrow \quad 2500a + b = 50$

(2) $f'(50) = -1 \quad \Rightarrow \quad -100a = -1$

$a = -\dfrac{1}{100}$ und $b = 75$

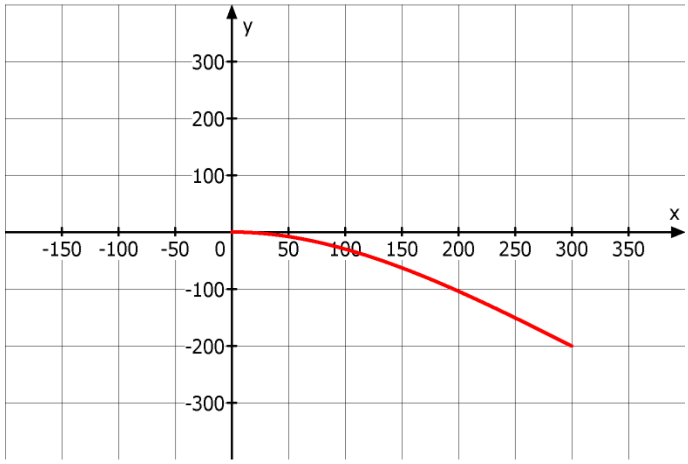
c) Angleichung durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3.Ordnung durch den Hochpunkt $A\left(0 \mid 0\right)$ und den Punkt $B\left(430 \mid -200\right)$ mit der Steigung $m = -1$ in diesem Punkt.

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

(1) $f(300) = -200 \quad \Rightarrow \quad 270000a + 900b = -2$

(2) $f'(300) = 0 \quad \Rightarrow \quad 270000a + 600b = -1$

$a = \dfrac{1}{270000}$ und $b = -\dfrac{1}{300}$


y
300
200
100
x
-150
-100
-50
0
50
100
150
200
250
300
350
-100
-200
-300