**Abitur 2009**

===========================================================================

Gegeben ist die Funktion $f: x \to x \cdot e^{2-x}$

mit der Defintionsmenge $D = \mathbb{R}$ und dem Graphen $G_f$

1. a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

   b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunkts von $G_f$ und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an $G_f$ im Punkt $P\left(0 \mid f(0)\right)$.

   $\left[\text{Zur Kontrolle}: f'(x) = (1-x) \cdot e^{2-x}\right]$

   c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von $G_f$. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts von $G_f$ an.

   d) Berechnen Sie $f(-0{,}5)$ und $f(5)$. Zeichnen Sie die Tangente t und den Graphen $G_f$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

   (Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-7 \le y \le 9$)

---

2. Ermitteln Sie durch Betrachtung einer jeweils geeigneten Dreiecks- oder Trapezfläche grobe Näherungswerte für die Inhalte der Flächen, die der Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x = 0$ und $x = 1$ bzw. $x = 1$ und $x = 5$ miteinander einschließen.

---

3. Gegeben ist nun zusätzlich die Schar der Geraden $g_a$ mit den Gleichungen $y = ax$.

   Jede Gerade $g_a$ hat mit $G_f$ den Ursprung gemeinsam (kein Nachweis erforderlich).

   Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte des Parameters a es einen zweiten Punkt gibt, den die Gerade $g_a$ mit $G_f$ gemeinsam hat.

   Geben Sie die x-Koordinate dieses Punktes in Abhängigkeit von a an.

---

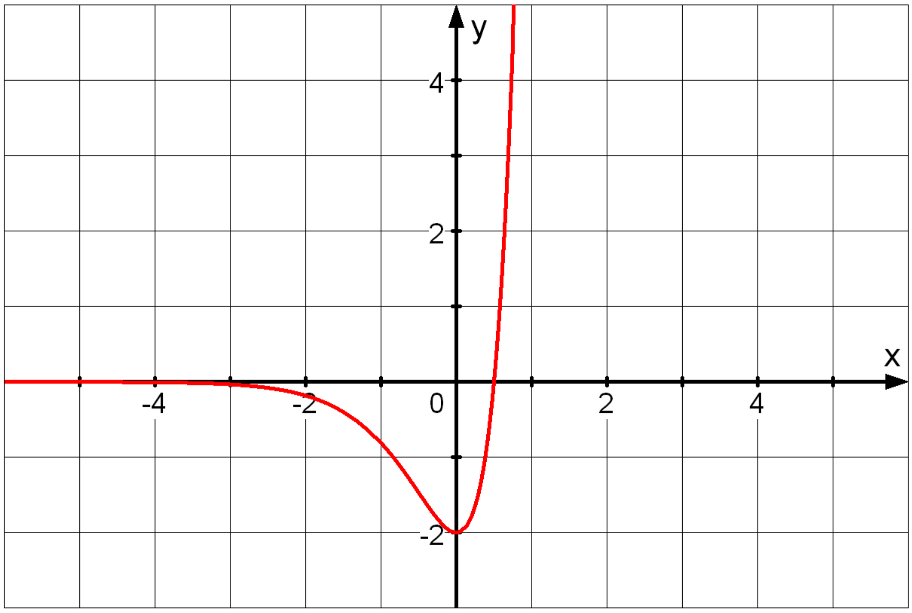
4. Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (-x-1) \cdot e^{2-x}$ eine Stammfunktion von f ist

---

**Abitur 2008**

==========================================================================

Die Abbildung zeigt den Graphen $G_g$der Funktion $g: x \rightarrow (4x-2) \cdot e^{2x}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.




1.a) Berechnen Sie die Nullstelle von g. $G_g$ besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie dessen Koordinaten.

$$\left[\text{Zur Kontrolle}: f'(x) = 8x \cdot e^{2x}\right]$$

b) Weisen Sie nach, dass  genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w. Tragen Sie diese in obige Abbildung ein.

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } w: y = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}\right]$$

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion h: $x \rightarrow y = (-4x-2) \cdot e^{-2x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und zugehörigem Graph $G_h$.

2. Begründen Sie anhand der Funktionsterme von g und h, dass man $G_h$ erhält, indem man $G_g$ an der y-Achse spiegelt. Zeichnen Sie $G_h$ in die Abbildung ein.

   Geben Sie die Gleichung der Wendetangente von $G_h$ an.

---

3. Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \rightarrow (2ax-2) \cdot e^{-2x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

   a) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h Funktionen der Schar sind, indem Sie die zugehörigen Parameterwerte a angeben.

Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden.

b) Jede Funktion der Schar hat genau eine Wendestelle und zwar bei  (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen p zur x-Achse liegen, und geben Sie die Gleichung von p an.

c) Die Wendetangente jedes Graphen der Schar schließt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein.

Für bestimmte Werte von a ist dieses Dreieck gleichschenklig.

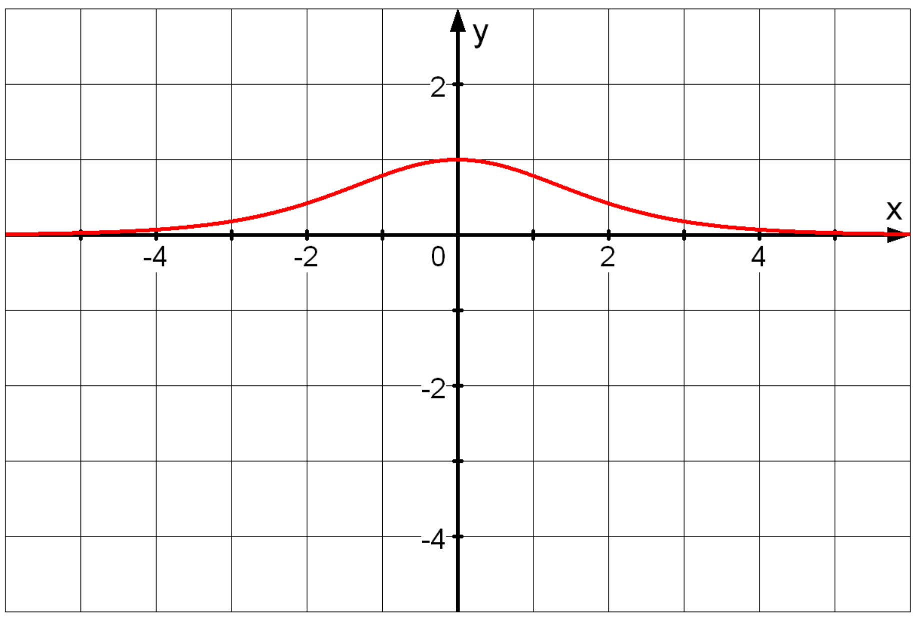
Beschreiben Sie einen Weg, um diese Werte von a rechnerisch zu ermitteln (Rechnungen nicht erforderlich).

---

**Abitur 2007**

===================================================================

Die Abbildung zeigt den Graphen $G_f$ der Funktion $f: x \to \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.




a) Begründen Sie, dass $G_f$ stets oberhalb der x-Achse verläuft und berechnen Sie den Schnittpunkt von $G_f$ mit der y-Achse.

Weisen Sie nach, dass für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0$ Asymptote von $G_f$ ist.

b) Erklären Sie, wie man mit Hilfe des Graphen ohne Berechnung von f ' näherungsweise Werte von f ' an einzelnen Stellen ermitteln kann.

Bestimmen Sie auf die von Ihnen beschriebene Weise einen Näherungswert für $f'(1)$ auf eine Dezimale gerundet.

c) Die Funktion F mit $D_F = \mathbb{R}$ hat die Form$f(x) = \frac{c}{e^x + 1}$ und ist eine Stammfunktion von f.

Bestimmen Sie die Konstante c.

$$\left[\text{Zur Kontrolle}: F(x) = \frac{-4}{e^x + 1}\right]$$

d) Bestimmen Sie F(0) und F(1) sowie das Verhalten von F an den Rändern von .

Begründen Sie, dass F streng monoton zunehmend in $\mathbb{R}$ ist.

e) Tragen Sie die Tangente an den Graphen von F im Punkt $P\left(0 \mid F(0)\right)$ in das Koordinatensystem ein und skizzieren Sie anschließend den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

2. Folgende Tabelle gibt für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1991 bis 1999 die Anzahl der Mobilfunkverträge in Deutschland jeweils zum Jahresende an.

| Jahr | 1991 | 1993 | 1995 | 1997 | 1999 |
|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl in Mio. | 0,5 | 1,8 | 3,8 | 8,3 | 23,4 |

Die steigende Anzahl der Mobilfunkverträge lässt sich in diesem Zeitraum näherungsweise als exponentielles Wachstum auffassen und durch eine Exponentialfunktion der Form $N(x) = a \cdot e^{bx}$ beschreiben.

N(x) ist dabei die Zahl der Mobilfunkverträge in Millionen, x ist die seit Jahresende 1991 vergangene Zeit in Jahren. Beispielsweise ist $x = 8$ für das Ende des Jahres 1999.

a) Bestimmen Sie a und b aus den Werten für die Jahre 1991 und 1999. Runden Sie b auf zwei Dezimalen.

$$\left[\text{Ergebnis}: a = 0{,}5 \text{ und } b = 0{,}48\right]$$

b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswertes N(x) für das Jahresende 1995 vom tatsächlichen Wert.

Welcher Funktionswert ergibt sich für das Jahresende 2007?

Bewerten Sie das Ergebnis im oben genannten Anwendungszusammenhang.

c) Bei einem exponentiellen Wachstum dauert es immer gleich lang, bis sich die Funktionswerte verdoppeln.

Berechnen Sie diese Verdopplungszeit im vorliegenden Fall.

Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow 1-(\ln x)^2$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

1.a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $G_f$ und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von $G_f$. Geben Sie die Wertemenge $W_f$ von f an.

$$\left[\text{Teilergebnis. } E\left(1 \mid 1\right)\right]$$

c) Die einzige Wendestelle von f ist $x_W = e$ (Nachweis nicht erforderlich).

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w.

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } y = -\frac{2}{e}x+2\right]$$

d) Berechnen Sie $f(e^{-2})$ und $f(6)$.

Zeichnen Sie die Wendetangente w und den Graphen $G_f$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich.

2. Zeigen Sie: Die Funktion $F: x \rightarrow x\cdot(\ln x-1)^2$ mit $D_F = \mathbb{R}^+$ ist Stammfunktion von f