Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen
==

Für $r \in \mathbb{R}^+$ gilt $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0}$ bzw. $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^r} = \infty}$ und

$\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0}$ bzw. $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^r}{\ln x} = \infty}$ und $\boxed{\lim\limits_{x \to 0+0} \left(x^r \cdot \ln x = 0\right)}$

Also speziell

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \infty$$

und

$$\lim_{x \to 0+0} x \cdot \ln x = 0 \text{ und } \lim_{x \to 0+0} \sqrt{x} \cdot \ln x = 0$$

Regel von l'Hospital

Sind u(x) und v(x) die Funktionsterme zweier differenzierbarer Funktionen u und v

und gilt $u(a) = v(a) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

Sind u(x) und v(x) die Funktionsterme zweier differenzierbarer Funktionen u und v

und gilt $\lim\limits_{x \to a} u(a) = \infty$ sowie $\lim\limits_{x \to a} v(a) = \infty$ und existiert $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

Zusatz: Die Sätze gelten auch $a = \infty$

Geben Sie die Definitionsmenge von f an und untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

Geben Sie die Asymptoten des Graphen von f an.

Aufgabe 1
==

a) $f : x \to e^x - x$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

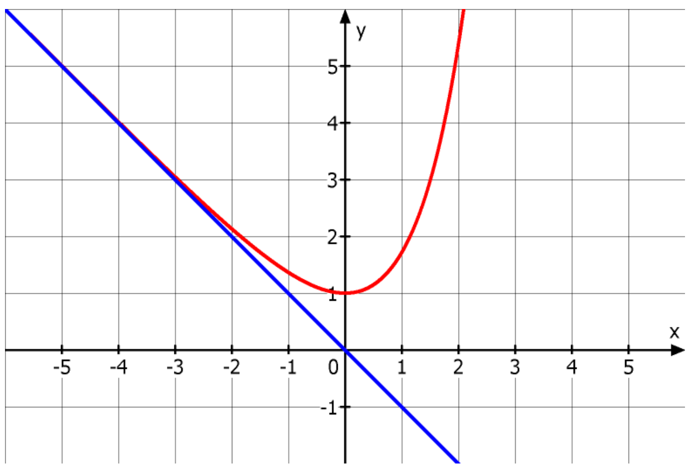
$$\lim_{x \to \infty} \left(e^x - x\right) \underset{\text{Faktorisieren}}{\overset{\infty - \infty}{=}} \lim_{x \to \infty} \left[e^x \cdot \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right] = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x - x\right) \overset{0 - (-\infty)}{=} \infty$$

Asymptoten:

Es ist $\lim_{x \to -\infty} \left[\left(e^x - x\right) - (-x)\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[e^x\right] = 0.$

Also ist die Gerade $y = -x$ schiefe Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$.



---

b) $f : x \to x + e^{-x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

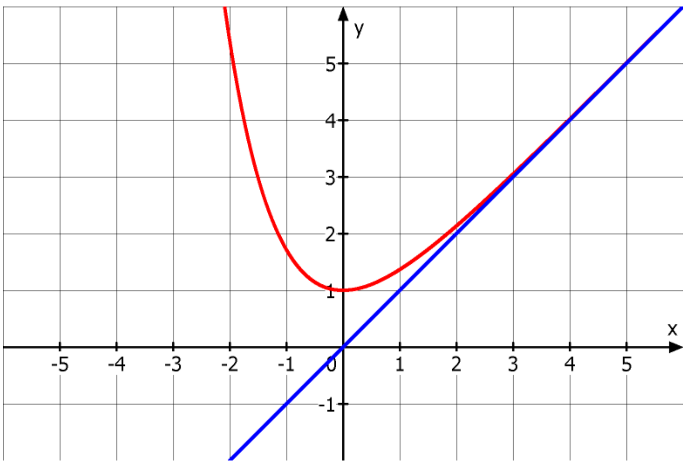
$$\lim_{x\to\infty}\left(x+e^{-x}\right) \overset{\infty-0}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+e^{-x}\right) \underset{\text{Spiegelung}}{\overset{-\infty+\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(-x+e^{x}\right) \underset{\text{Faktorisieren}}{\overset{-\infty+\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\left[e^{x}\cdot\left(-\frac{x}{e^{x}}+1\right)\right] = \infty$$

Asymptoten:

Es ist $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x+e^{-x}\right)-x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{-x}\right] = 0.$

Also ist die Gerade $y = x$ schiefe Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$.



---

c) $f : x \to \frac{1}{x} - e^{x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-e^{x}\right) \overset{0-\infty}{=} -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-e^{x}\right) \overset{0-0}{=} 0$

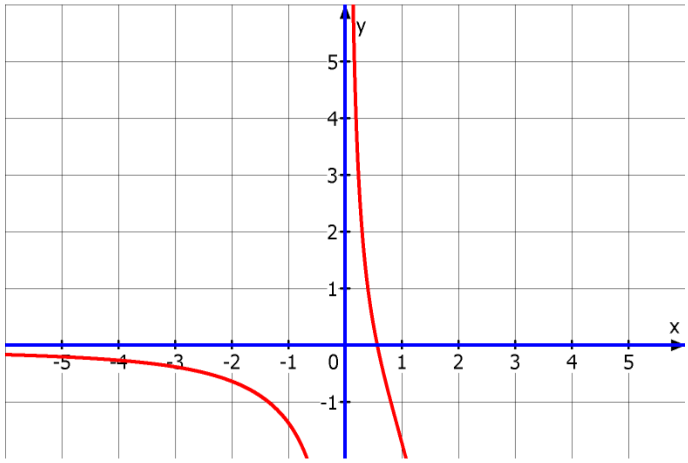
$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-e^{x}\right) \overset{\infty-1}{=} \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{x}-e^{x}\right) \overset{-\infty-1}{=} -\infty$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$

und

die Gerade $x = 0$ senkrechte Asymptote des Graphen.



---

d) $f : x \to x \cdot e^x$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x \cdot e^x \right) \overset{\infty \cdot \infty}{=} \infty \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^x \right) \underset{\text{Spiegelung}}{\overset{-\infty \cdot 0}{=}} \lim_{x \to \infty} \left(-x \cdot e^{-x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{x}{e^x} \right) = 0$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$

---

e) $f : x \to (x-1) \cdot e^{-x}$

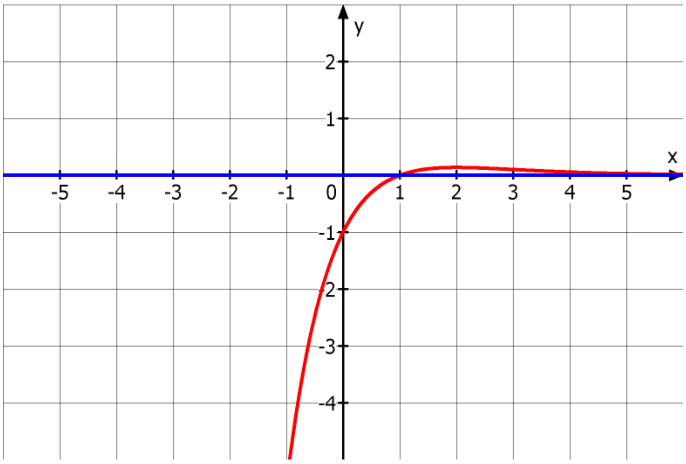
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \left[(x-1) \cdot e^{-x} \right] \overset{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x-1}{e^x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(x-1) \cdot e^{-x} \right] \overset{-\infty \cdot \infty}{=} -\infty$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$



---

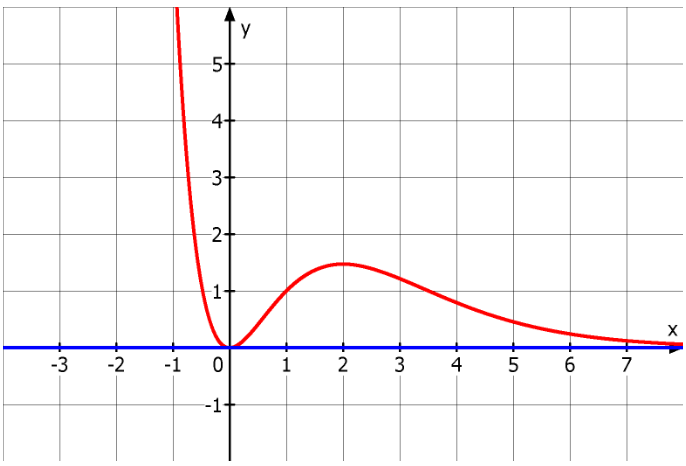
f) $f : x \to x^2 \cdot e^{1-x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \left[x^2 \cdot e^{1-x} \right] \overset{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2}{e^{x-1}} \right] = 0 \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \left[x^2 \cdot e^{1-x} \right] \overset{\infty \cdot \infty}{=} \infty$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$



---

g) $f: x \to \frac{e^x}{x+1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty}\left[\frac{\frac{e^x}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right] = \infty \text{ und } \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right) \overset{\frac{0}{-\infty}}{=} 0$$

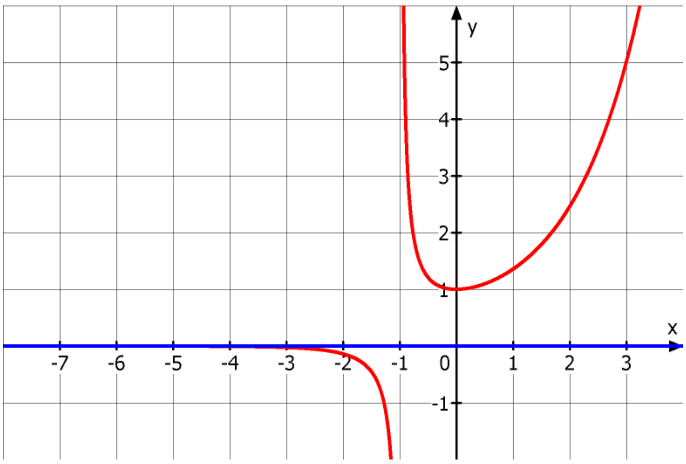
$$\lim_{x \to -1+0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right) \overset{\frac{\frac{1}{e}}{0+0}}{=} \infty \text{ und } \lim_{x \to -1-0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right) \overset{\frac{\frac{1}{e}}{0-0}}{=} -\infty$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$

und

die Gerade $x = -1$ ist senkrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to 1 \pm 0$.



---

h) $f: x \to \frac{1-e^x}{x}$

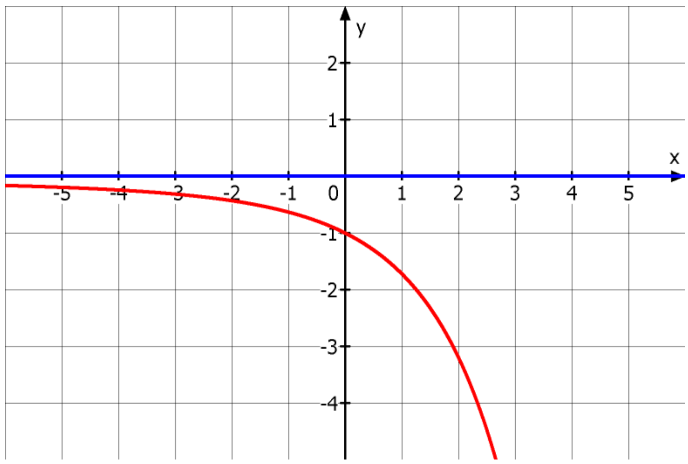
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1-e^x}{x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) \overset{0-\infty}{=} -\infty \text{ und } \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1-e^x}{x}\right) \overset{\frac{1}{-\infty}}{=} 0$$

$$\lim_{x \to 0\pm 0}\left(\frac{1-e^x}{x}\right) \underset{\text{l'Hospital}}{\overset{\frac{\frac{1}{e}}{0+0}}{=}} \lim_{x \to 0\pm 0}\left(\frac{-e^x}{1}\right) = -1$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$



Aufgabe 2

==

a) $f : x \to e^{2x} - 2 \cdot e^x$

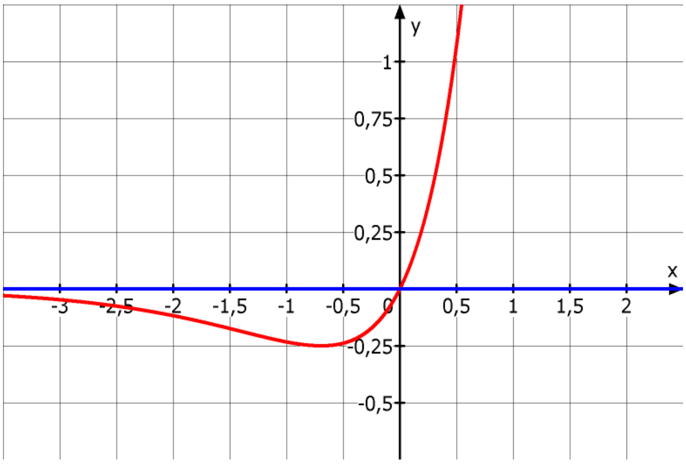
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty}\left(e^{2x} - 2 \cdot e^x\right) \underset{\text{Faktorisieren}}{\overset{\infty - \infty}{=}} \lim_{x \to \infty}\left[e^x \cdot \left(e^x - 2\right)\right] \overset{\infty \cdot \infty}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(e^{2x} - 2 \cdot e^x\right) \overset{0-0}{=} 0$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$.



---

b) $f: x \to e^{1-x^2}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

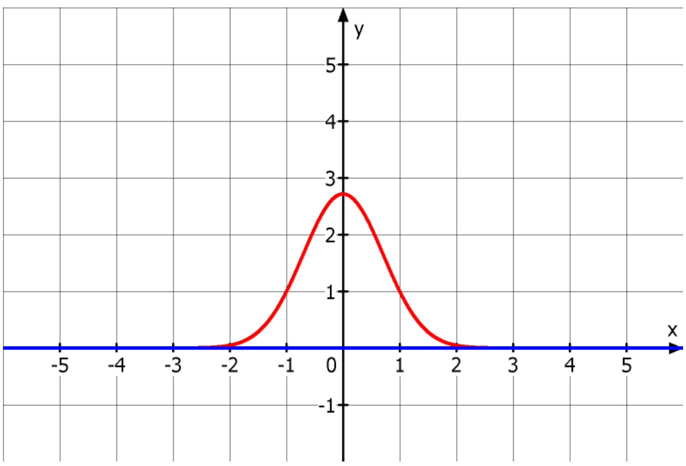
Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - x^2\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - x^2\right) = -\infty$

und damit

$$\lim_{x \to \infty} \left(e^{1-x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{1-x^2}\right) = 0$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \pm\infty$.



---

c) $f: x \to \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

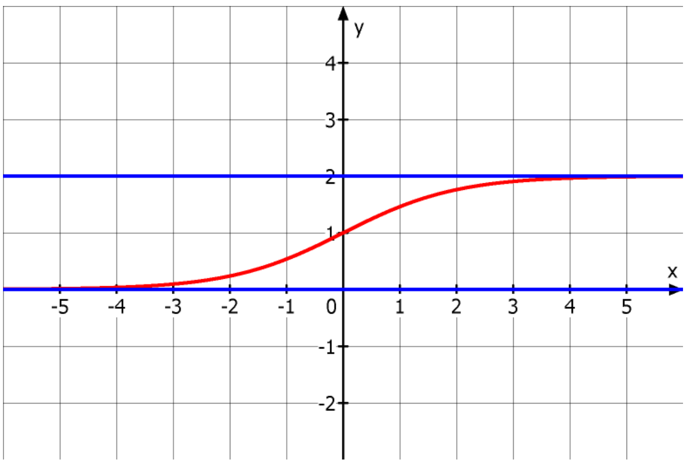
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} \overset{\frac{2}{1}}{=} 2 \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} \overset{\frac{0}{1}}{=} 0$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 0$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$

und

die Gerade $y = 2$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$



---

d) $f : x \to e^{\frac{1}{x}}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Es ist $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ und damit $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to .\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Es ist $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$ und damit $\lim\limits_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

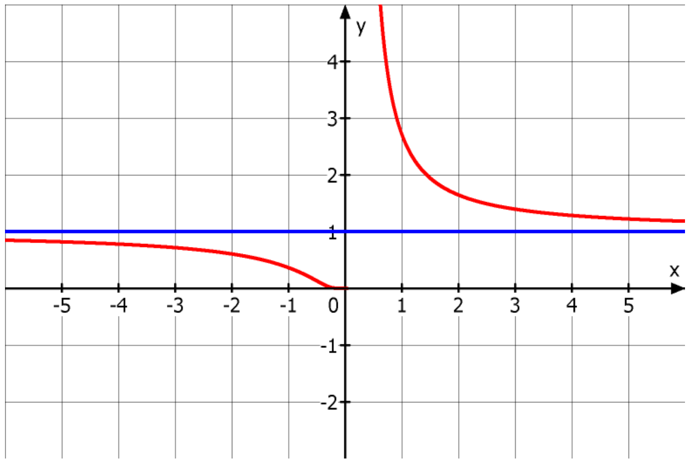
Es ist $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ und damit $\lim\limits_{x \to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 1$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \pm\infty$

und

die Gerade $x = 0$ senkrechte Asymptote des Graphen für $x \to 0+0$.



---

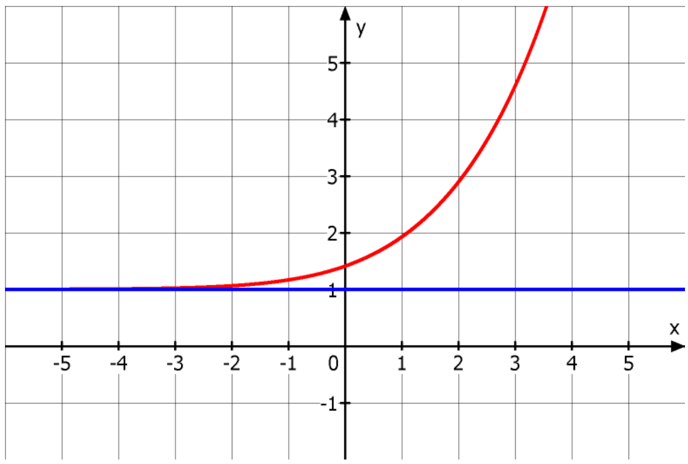
e) $f: x \to \sqrt{e^x + 1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{e^x + 1} = \infty \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \sqrt{e^x + 1} = \sqrt{1} = 1$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 1$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$.



---

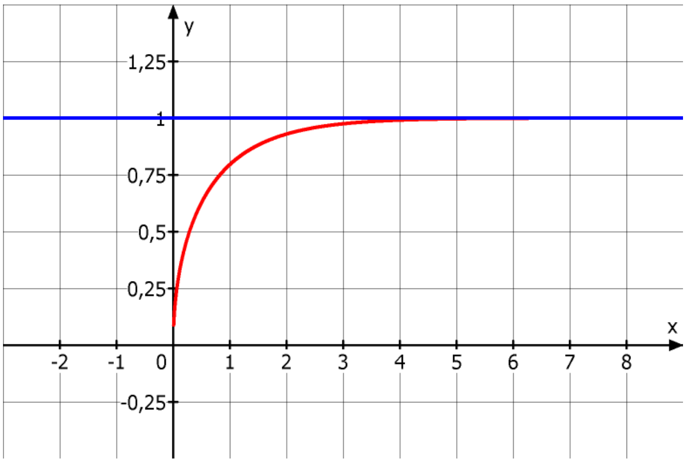
f) $f: x \to \sqrt{1 - e^{-x}}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{1 - e^{-x}} = \sqrt{1} = 1 \text{ und } \lim_{x \to 0+0} \sqrt{1 - e^{-x}} = \sqrt{0} = 0$$

Asymptoten:

Also ist die Gerade $y = 1$ waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$.



Aufgabe 3

===

a) $f: x \to \ln x - x$

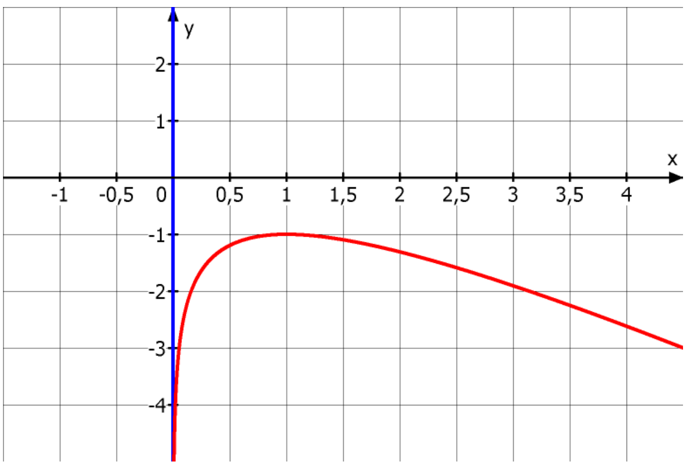
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln x - x\right) \underset{\text{Faktorsierung}}{\overset{\infty - \infty}{=}} \lim_{x \to \infty} \left[\ln x \cdot \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\ln x - x\right) \overset{-\infty - 0}{=} -\infty$$

Asymptoten:

Die Gerade $x = 0$ ist senkrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to 0+0$.



---

b) $f : x \to x \cdot \ln x$

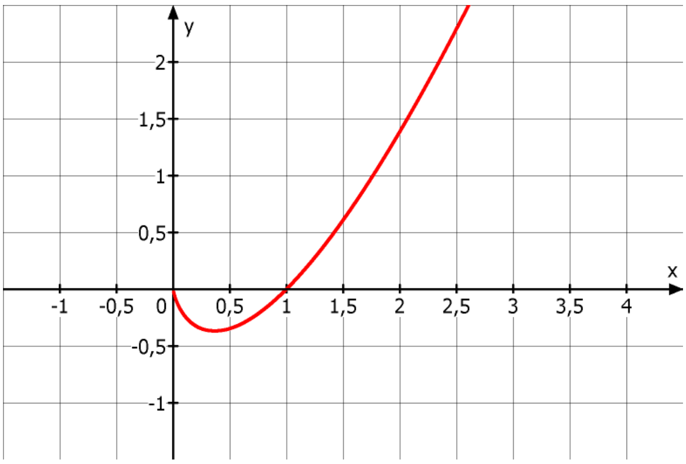
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x \cdot \ln x \right) \overset{\infty \cdot \infty}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(x \cdot \ln x \right) \overset{0 \cdot (-\infty)}{=} 0 - 0$$

Asymptoten:

Der Graph von f besitzt keine Asymptoten.



---

c) $f : x \to \dfrac{x}{\ln x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+ \backslash \{ -1 \}$

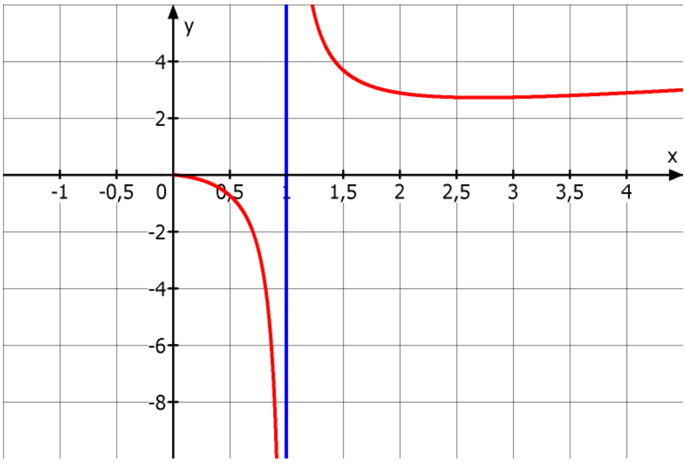
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \overset{\frac{1}{0+0}}{=} \infty \text{ und } \lim_{x \to 1-0} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \overset{\frac{1}{0-0}}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \overset{\frac{0}{-\infty}}{=} 0$$

Asymptoten:

Die Gerade $x = 1$ ist senkrechte Asymptote des Graphen von f.



---

d) $f : x \to \dfrac{1 - \ln x}{x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$

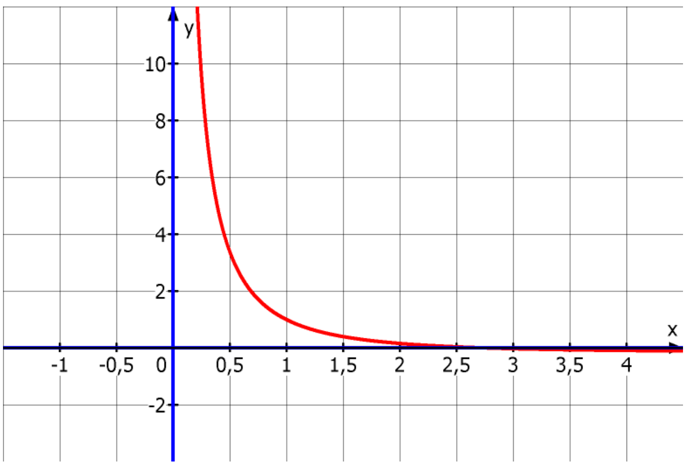
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) \overset{\frac{\infty}{0+0}}{=} \infty$$

Die Gerade $y = 0$ ist waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$

und

die Gerade $x = 0$ ist senkrechte Asymptote für $x \to 0 + 0$.



---

e) $f : x \to \dfrac{1 - \ln x}{x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{x - 1} \right) \underset{\text{l'Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = 0$$

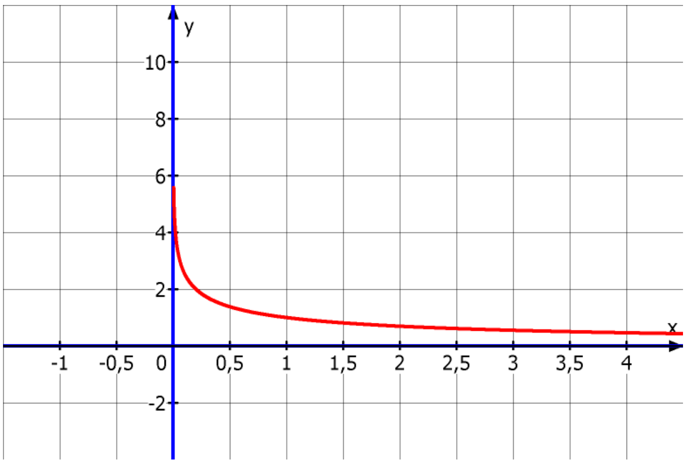
$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \left(\frac{\ln x}{x - 1} \right) \underset{\text{l'Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{\ln x}{x - 1} \right) \overset{\frac{-\infty}{-1}}{=} \infty$$

Die Gerade $y = 0$ ist waagrechte Asymptote des Graphen von f für $x \to \infty$

und

die Gerade $x = 0$ ist senkrechte Asymptote für $x \to 0 + 0$.



Aufgabe 4

===

a) $f : x \to \ln(2x + 1)$

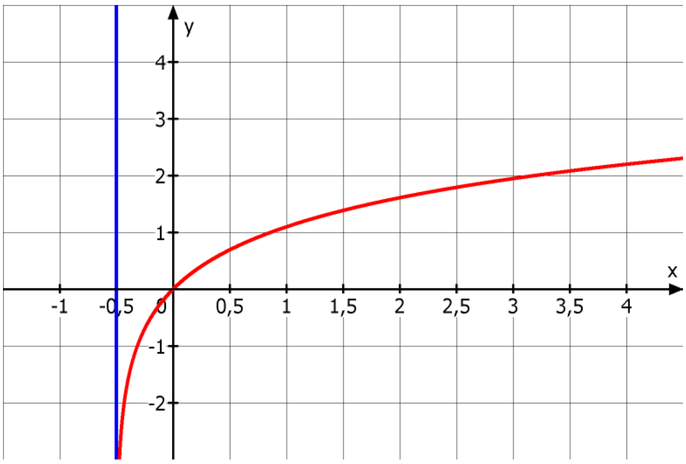
Definitionsmenge: $D =]-0,5; \infty[$

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln(2x + 1) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x\,\infty} (2x + 1) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}+0} \ln(2x+1) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}+0} (2x+1) = 0+0$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$

Asymptoten:

Die Gerade $x = -\frac{1}{2}$ ist senkrechte Asymptote für $x \to -\frac{1}{2}+0$.



---

b) $f : x \to \ln(1-x^2)$

Definitionsmenge: $D =]-1; 1[$

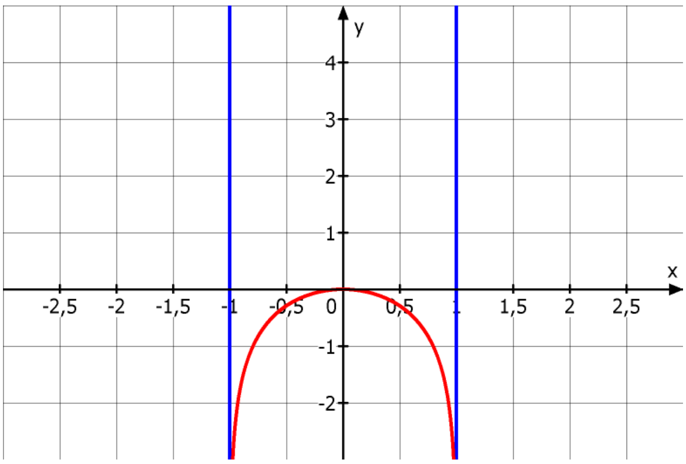
$\lim\limits_{x \to 1-0} \left[\ln(1-x^2)\right] = -\infty$, weil $\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x^2) = 0+0$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1+0} \left[\ln(1-x^2)\right] = -\infty$, weil $\lim\limits_{x \to -1+0} (1-x^2) = 0+0$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$

Asymptoten:

Die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ sind senkrechte Asymptoten für $x \to -1+0$

bzw. $x \to 1-0$.



---

b) $f: x \rightarrow (\ln x)^2 - \ln x$

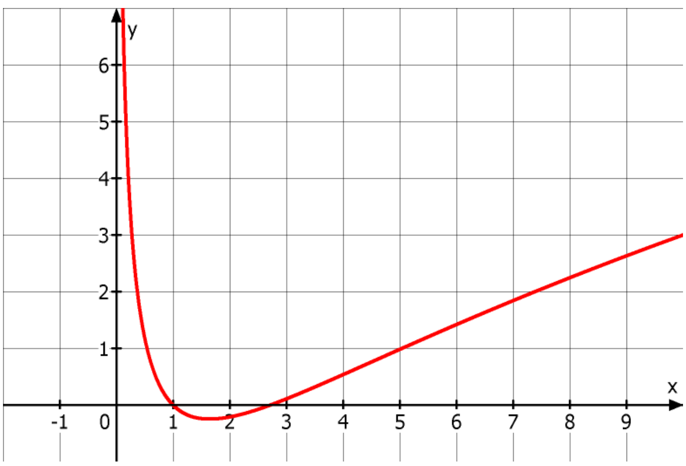
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to \infty} \left[(\ln x)^2 - \ln x \right] \underset{\text{Faktorisierung}}{\overset{\infty - \infty}{=}} \lim_{x \to \infty} \left[\ln x \cdot \left(\ln x - 1 \right) \right] = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[(\ln x)^2 - \ln x \right] \overset{\infty - (-\infty)}{=} \infty$$

Asymptoten:

Der Graph von f besitzt keine Asymptoten.



---

d) $f: x \rightarrow \ln \frac{2x}{x-1}$

Definitionsmenge: $D =]\infty; 0[\cup]1; \infty[$

Vorzeichenbetrachtung des Arguments

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$2x$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2x}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln\frac{2x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \ln\frac{2}{1-\frac{1}{x}} = \ln 2$$

$$\lim_{x \to 0-0} \ln\frac{2x}{x-1} = -\infty, \text{ weil } \lim_{x \to 0-0} \frac{2x}{x-1} = 0+0 \text{ und } \lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to 1+0} \ln\frac{2x}{x-1} = -\infty, \text{ weil } \lim_{x \to 1+0} \frac{2x}{x-1} = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty 0} \ln x = \infty$$

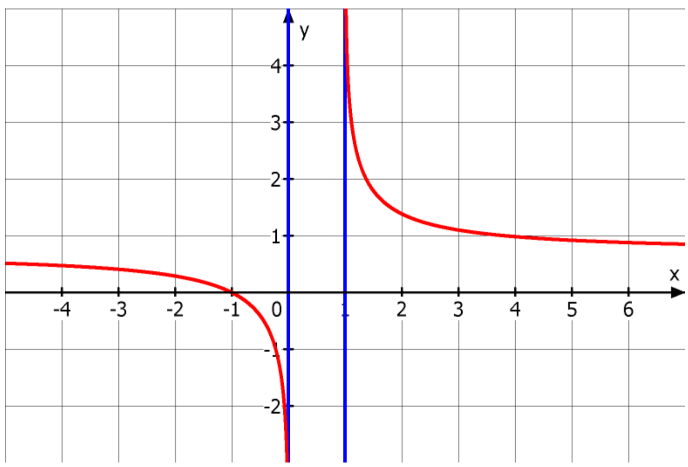
Asymptoten:

Die Gerade $y = \ln 2$ ist waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$

.

Die Geraden $x = 0$ bzw. $x = 1$ sind senkrechte Asymptoten für $x \to 0 - 0$

bzw. $x \to 1 + 0$.



---

e) $f : x \to \dfrac{\ln x}{0{,}5 - \ln x}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+ \backslash \{\sqrt{e}\}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{0{,}5 - \ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{0{,}5}{\ln x} - 1} = -1 \text{ und } \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{0{,}5 - \ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\frac{0{,}5}{\ln x} - 1} = -1$$

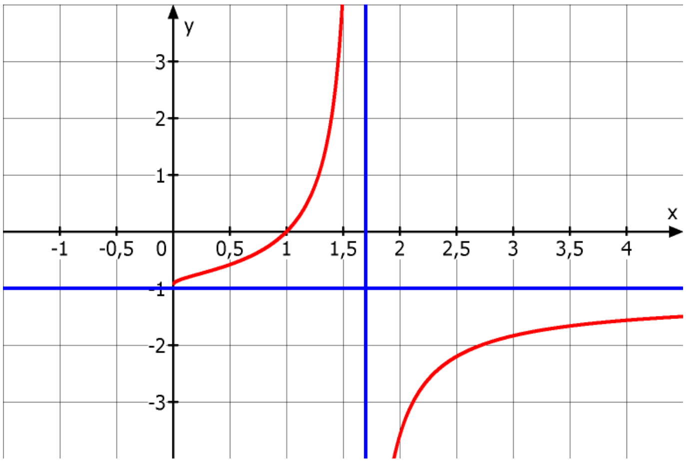
$$\lim_{x \to \sqrt{e}+0} \frac{\ln x}{0{,}5 - \ln x} \overset{\frac{0{,}5}{0+0}}{=} \infty \text{ und } \lim_{x \to \sqrt{e}-0} \frac{\ln x}{0{,}5 - \ln x} \overset{\frac{0{,}5}{0-0}}{=} -\infty$$

Asymptoten:

Der Graph von f besitzt die Gerade $y = -1$ als waagrechte Asymptote für $x \to \infty$

und

die Gerade $x = \sqrt{e}$ als senkrechte Asymptote für $x \to \sqrt{e} \pm 0$



---

f) $f : x \to \sqrt{1 + \ln x}$

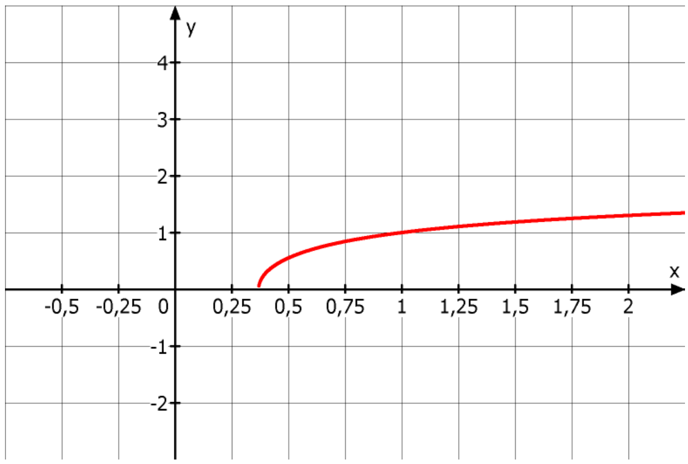
Definitionsmenge: $D = [\frac{1}{e}; \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + \ln x} = \infty, \text{ weil } \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}+0} \sqrt{1 + \ln x} = 0$$

Asymptoten:

Der Graph von f besitzt keine Asymptoten.



y
4
3
2
1
x
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
1,75
2
-1
-2