6. Anwendungen der Differentialrechnung

==

6.1 Extremwertaufgben

Eine Größe G hänge von mehreren Variablen ab.

Wenn man sich dafür interesssiert, für welche Werte dieser Variablen die davon abhängige Größe G einen Extremwert annimmt, dann liegt ein Extremwertaufgabe vor.

Bei einfachen Aufgabenstellungen bestehen zwischen diesen Variablen Gleichungen sog. ***Nebenbedingungen***, so dass G als Funktion einer einzigen dieser Variablen, der sog. ***Ziel-funktion*** dargestellt werden kann.

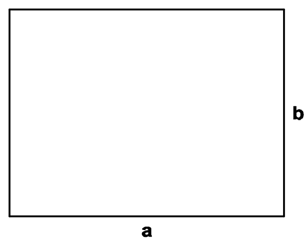
Ist die Zielfunktion auf einem Intervall definiert und differenzierbar, dann kann sie an den Intervallgrenzen oder im Innern des Intervalls an den kritischen Stellen den gesuchten Extremwert annehmen.

Beispiel 1

Welches Rechteck mit dem Umfang 100 hat den den größten Flächeninhalt?

Lösung:

Planfigur:



Größe: $G = A = a \cdot b$

Nebenbedingung: $U = 100 = 2a + 2b \quad \Rightarrow \quad b = 50 - a$

Zielfunktion: $A(a) = a \cdot (50 - a) = 50a - a^2$ mit $0 < a < 50$

Extremstellenbestimmung: $A'(a) = 50 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 25$ und damit $b = 25$.

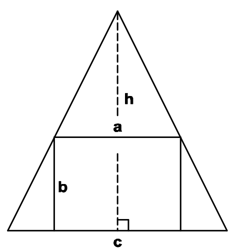
Randwerte: $\lim\limits_{a \to 0+0} A(a) = \lim\limits_{a \to 50-0} A(a) = 0$

Von allen Rechtecken mit dem Umfang 100 hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Beispiel 2

Einem gleichschenkligen Dreieck soll ein Rechteck mit der Basis $c = 10$ und der zugehörigen Höhe $h = 8$ wird ein Rechteck einbeschrieben.

Für welche Abmessungen hat das Rechteck den größtmöglichen Inhalt ?



Lösung:

Größe: $G = A = a \cdot b$

Nebenbedingung: $\frac{a}{10} = \frac{8-b}{h} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8-b}{8} \cdot 10$

Zielfunktion: $A(b) = \frac{8-b}{8} \cdot b = b - \frac{1}{8}b^2$ mit $0 < b < 8$

Extremstellenbestimmung: $A'(b) = 1 - \frac{1}{4}b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$ und damit $a = 5$

Randwerte: $\lim\limits_{b \to 0+0} A(b) = \lim\limits_{b \to 8-0} A(b) = 0$

Für $a = 5$ und $b = 4$ cm ergibt sich ein Maximum des Flächeninhalts.

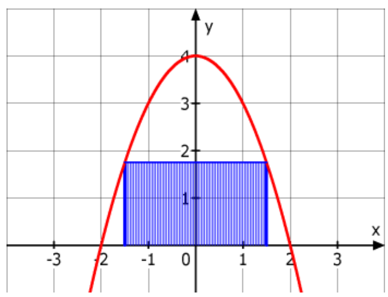
Beispiel 3

Dem endlichen Flächstück, das der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4 - x^2$ mit der x-Achse einschließt, soll das größtmögliche Rechteck mit achsenparallelen Seiten einbeschrieben werden.

Welchen Inhalt hat dieses Rechteck?

Lösung:

Planfigur:



Größe: $G = A = 2x \cdot y$

Nebenbedingung: $y = 4 - x^2$

Zielfunktion: $A'(x) = 2x \cdot (4 - x^2) = 8x - 2x^3$ mit $0 < x < 2$

Extremstellenbestimmung: $A'(x) = 8 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

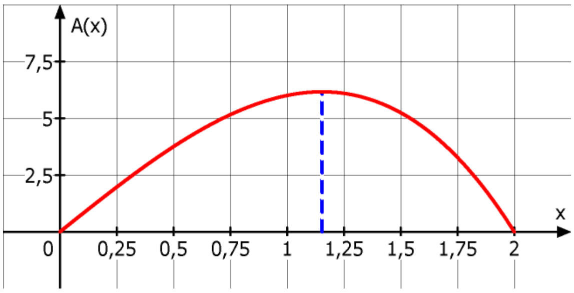
Randwerte: $\lim\limits_{x \to 0+0} A(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} A(x) = 0$

Art des Extremums:

	$0 < x < \frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < 2$
$A'(x)$	+	−

Das gesuchte Rechteck hat den Inhalt $A(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{32}{9}\sqrt{3}$

Veranschaulichung der Funktion A(x)



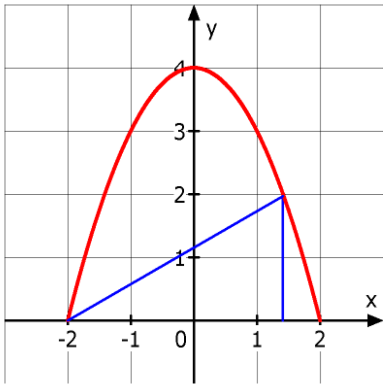
Beispiel 4

Der Punkt $C\left(x \mid y\right)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f mit

$f(x) = -x^2 + 4$

Für welchen Wert von x hat das Dreieck ABC mit $A\left(-2 \mid 0\right)$

und $B\left(x \mid 0\right)$ maximalen Flächeninhalt ?



Lösung:

Größe: $G = A = \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot y$ mit $-2 \le x \le 2$

Nebenbedingung: $y = 4 - x^2$

Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot (4 - x^2)$

Extremstellenbestimmung:

$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 - x^2) + \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot (-2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 - 2x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow$

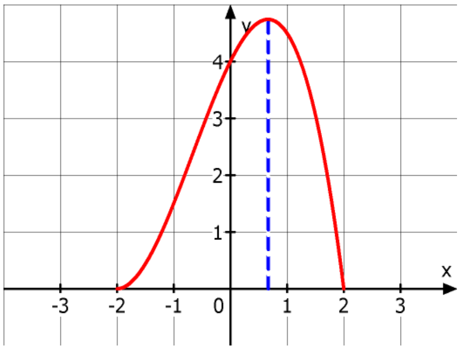
$3x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = \frac{2}{3}$

	$-2 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$
A'(x)	+	–

Randwerte: $A(-2) = A(2) = 0$

Für $x = \frac{2}{3}$ ergibt sich ein Maximum des Inhalts.

Veranschaulichung der Funktion A(x):



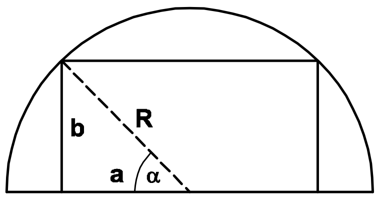
Beispiel 5

Einem Halbkreis mit dem dem Radius R wird ein Rechteck einschrieben, dessen eine Seite auf dem Durchmesser des Halbkreis liegt.

Welchen maximalen Flächeninhalt kann ein derartiges Recheck besitzen?

Lösung:

Planfigur:



Größe: $G = A = 2a \cdot b$

Nebenbedingung: $a^2 + b^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{R^2 - a^2}$

Zielfunktion. $A(a) = 2a \cdot \sqrt{R^2 - a^2}$ mit $0 < a < R$

Extremstellenbestimmung:

$$A'(a) = 2 \cdot \sqrt{R^2 - a^2} + 2a \cdot \frac{(-2a)}{2 \cdot \sqrt{R^2 - a^2}} = 2\sqrt{R^2 - a^2} - \frac{2a^2}{\sqrt{R^2 - a^2}} = 0 \quad \Big| \cdot \sqrt{R^2 - a^2}$$

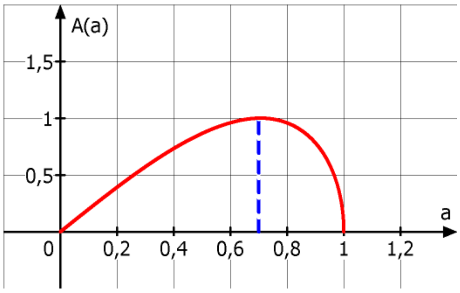
$$2R^2 - 2a^2 - 2a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}R\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$$

Randwerte:

$\lim_{a \to 0+0} A(a) = 0$ und $\lim_{a \to R-0} A(a) = 0$

Das größtmögliche Rechteck hat einen Inhalt von $A(\frac{1}{2}R\sqrt{2}) = R^2$.

Veranschaulichung der Funktion A(a) für $R = 1$:



Bemerkung :

Um die Extremstelle zu finden, kann man auch die Funktion $Q(a) = \left[A(a)\right]^2$ untersuchen.

Wegen

$Q'(a) = 2 \cdot A(a) \cdot A'(a)$

sind die kritischen Stellen von A(a) auch kritische Stellen von Q(a).

Es ist $Q(a) = 4a^2 \cdot (R^2 - a^2) = 4R^2 \cdot a^2 - 4a^4 \quad \Rightarrow \quad 8R^2 \cdot a - 16a^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$

Bemerkung:

Als unabhängige Variable lässt sich auch der Winkel α (Bogenmaß x) verwenden.

Es gilt dann

$A(x) = 2R \cdot \cos x \cdot R \cdot \sin x = 2R^2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

und damit

$A'(x) = 2R^2 \cdot \cos^2 x - 2R^2 \cdot \sin^2 x = 2R^2 \cdot (2\cos^2 x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$

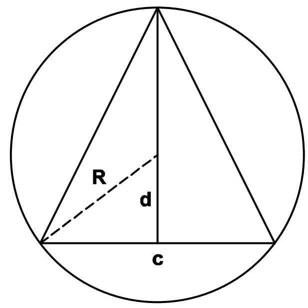
Beispiel 6

Einem Kreis wird ein möglichst großes gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben.

Welchen Flächeninhalt besitzt dieses Dreieck ?

Lösung:

Planfigur:



Größe: $G = A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (R + d)$ mit $0 \leq d \leq R$

Nebenbedingung: $(\frac{c}{2})^2 + d^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad c = 2 \cdot \sqrt{R^2 - d^2}$

Zielfunktion: $A(d) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - d^2} \cdot (R + d) = (R + d) \cdot \sqrt{R^2 - d^2}$

Extremstellenbestimmung:

$$A'(d) = \sqrt{R^2 - d^2} + \frac{R + d}{2\sqrt{R^2 - d^2}} \cdot (-2d) = \sqrt{R^2 - d^2} - \frac{Rd + d^2}{\sqrt{R^2 - d^2}} = 0 \quad \Big| \cdot \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$R^2 - d^2 - Rd - d^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2d^2 + Rd - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2}R \vee d = -R$$

Art des Extremum:

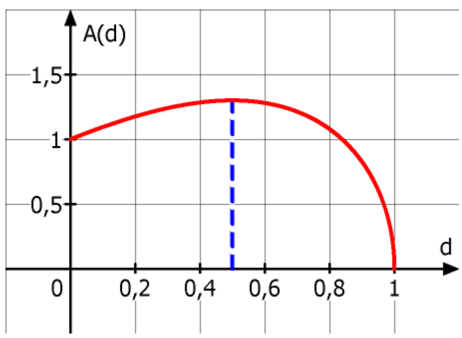
	$0 < d < \frac{R}{2}$	$\frac{R}{2} < d < R$
$A'(d)$	$+$	$-$

Randwerte: $A(0) = R^2 < \frac{3}{4} \cdot R^2\sqrt{3}$ und $A(R) = 0$

Für $d = \frac{R}{2}$ liegt ein Maximum des Flächeninhalts vor.

Es ergibt sich dann $c = 2\sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = R\sqrt{3}$ und damit $A(\frac{R}{2}) = \frac{3}{4} \cdot R^2\sqrt{3}$

Veranschaulichung der Funktion $A(d)$ mit $R = 1$:



Beispiel 7

Welcher Zylinder mit der Oberfläche $O = 1\ dm^2$ besitzt den größten Rauminhalt ?

Lösung:

Größe: $G = V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Nebenbedingung: $O = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h = 1 \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{1 - 2\pi \cdot r^2}{2\pi r}$

Zielfunktion: $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot \dfrac{1 - 2\pi \cdot r^2}{2\pi r} = \dfrac{1}{2} r \cdot (1 - 2\pi \cdot r^2)$ und damit $0 \le r \le \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$

Extremwertbestimmung:

$V'(r) = \dfrac{1}{2} \cdot (1 - 2\pi \cdot r^2) + \dfrac{1}{2} r \cdot (-4\pi r) = \dfrac{1}{2} - 3\pi \cdot r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\dfrac{1}{6\pi}}$

Art des Extremums:

	$0 < r < \sqrt{\dfrac{1}{6\pi}}$	$\sqrt{\dfrac{1}{6\pi}} < r < \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$
$V'(r)$	$+$	$-$

Randwerte: $V(0) = V(\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}) = 0$

Damit sich maximaler Rauminhalt ergibt muss $r = \sqrt{\dfrac{1}{6\pi}}$ sein.

Beispiel 8

Welcher Quader mit quadratischer Grundfläche hat bei gegebenem Volumen V den kleinsten Oberflächeninhalt ?

Lösung:

Größe: $G = O = 2a^2 + 4a \cdot h$

Nebenbedingung: $V = a^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{V}{a^2}$ und damit $0 < a < \infty$

Zielfunktion: $O(a) = 2a^2 + 4a \cdot \dfrac{V}{a^2} = 2a^2 + \dfrac{4V}{a}$

Extremwertbestimmung:

$O'(a) = 4a - \dfrac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{V}$ und damit $h = \dfrac{V}{V^{\frac{2}{3}}} = V^{\frac{1}{3}} = a$

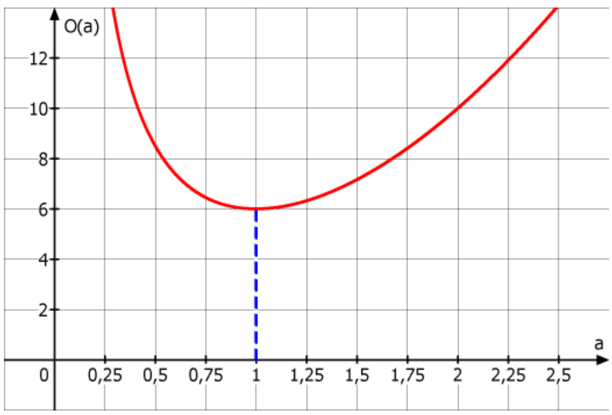
	$0 < a < \sqrt[3]{V}$	$\sqrt[3]{V} < a < \infty$
O'(a)	$-$	$+$

Randwerte: $\lim\limits_{a \to 0} O(a) = \infty$ und $\lim\limits_{a \to \infty} O(a) = \infty$

Damit sich ein minimaler Oberflächeninhalt ergibt muss der Quader ein Würfel sein.

Es ist dann $O(V^{\frac{1}{3}}) = 6V^{\frac{2}{3}}$.

Veranschaulichung der Funktion O(a) mit $V = 1$:



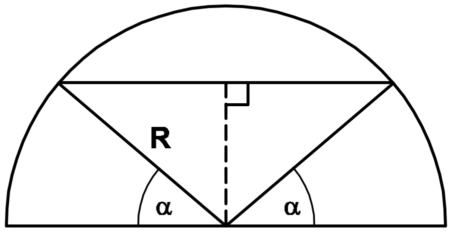
Beispiel 9

Einer Halbkugel mit dem Radius R wird ein Kegel einbeschrieben, dessen Spitze der Mittelpunkt des Grundkeises der Halbkugel ist.

Bestimmen Sie das größte Volumen, das ein derartiger Kegel haben kann!

Lösung:

Planfigur:



Größe: $G = V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Zielfunktion: $V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (R \cdot \cos x)^2 \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x$ mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Reduzierte Zielfunktion: $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

Extremstellenberechnung:

$f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin^2 x) + \cos^2 x \cdot \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x \cdot (-2\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\cos x = 0 \ \vee \ -3\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \sin x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

und damit $\cos x = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

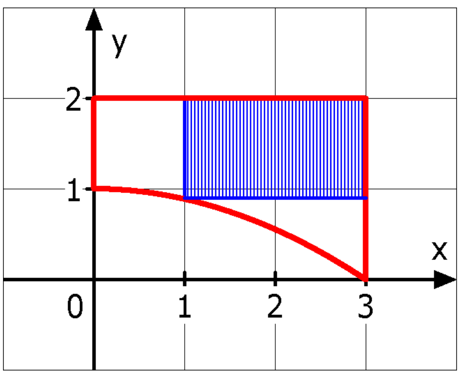
Randwerte: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

und damit ergibt sich für $\sin x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ein Maximum des Rauminhalts

Es ergibt sich $V_{max} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{27}R^3 \cdot \sqrt{3}$

Aufgabe 11

Dem nebenstehenden Flächenstück, das von y-Achse, den Geraden $y = 2$ und $x = 3$ und der Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{9}x^2 + 1$ begrenzt ist, wird ein Rechteck einbeschrieben.



Bestimmen Sie den Inhalt des größten dieser Rechtecke!

Lösung:

Zielfunktion: $A(x) = (3-x)\cdot[2-(-\frac{1}{9}x^2+1)] = (3-x)\cdot(1+\frac{1}{8}x^2)$ mit $0 \le x < 3$

Extremstellenbestimmung:

$A'(x) = -(1+\frac{1}{9}x^2) + (3-x)\cdot\frac{2}{9}x = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1<0$

Randwerte: $A(0) = 3$ und $\lim\limits_{x \to 3-0} A(x) = 0$

Das größte Rechteck hat den Flächeninhalt $A(0) = 3$.

Beispiel 12

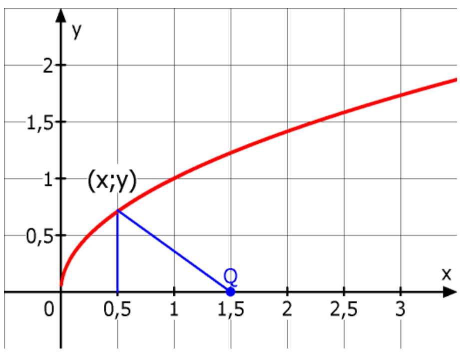
Welcher Punkt auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ hat

a) vom Punkt $P\left(0{,}25 \mid 0\right)$ b) vom Punkt $Q\left(1{,}5 \mid 0\right)$

minimalen Abstand.

Lösung:

Planfigur:



Zielfunktion: $q(x) = (0{,}25-x)^2+x$ (Abstandsquadrat)

Extremstellenbestimmung:

$q'(x) = 2\cdot(x-0{,}25)+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x-0{,}5$

aber $0 \le x < \infty$

Randwerte: $d(0) = 0{,}5$ und $\lim\limits_{x \to \infty} d(x) = \infty$

Zielfunktion: $q(x) = (1{,}5-x)^2+x$

Extremstellenbestimmung: $q'(x) = 2\cdot(x-1{,}5)+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ und $q(2) = 2{,}25$

und damit $d(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Randwerte: $d(0) = 2$ und $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = \infty$

Der Punkt P hat vom Punkt $\left(0 \,|\, 0\right)$ und der Punkt Q vom Punkt $\left(1 \,|\, 1\right)$ minimalen Abstand.

Beispiel 13

Eine Kugel mit dem Radius mit dem Radius R ist die Inkugel eines geraden Kegels, dessen

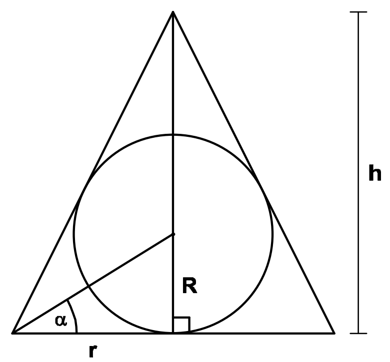
a) Rauminhalt b) Mantelfläche c) Oberfläche

möglichst klein ist.

Bestimmen Sie die minimal möglichen Werte.

Lösung:

Planfigur:



Größe: $G = V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Nebenbedigungen:

$$\frac{R}{r} = \tan x \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\tan x}$$

$$\frac{r}{h} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{1}{\tan(2x)} \quad \Rightarrow \quad h = r \cdot \tan(2x) = \frac{R}{\tan x} \cdot \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2R}{1 - \tan^2 x}$$

Reduizierte Zielfunktion: $v(x) = \frac{1}{\tan^2 x \cdot (1 - \tan^2 x)} = \frac{1}{\tan^2 x - \tan^4 x}$

Substitution $u := \tan^2 x$ ergibt

$$v(u) = \frac{1}{u - u^2} \quad \Rightarrow \quad v'(u) = -\frac{1}{(u - u^2)^2} \cdot (1 - 2u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}$$

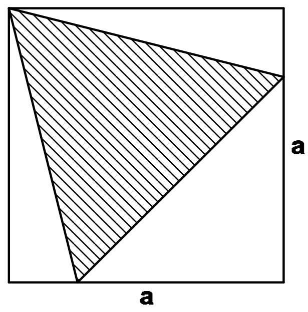
Minimales Volumen: $V_{min} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \cdot 2R^3 = \frac{8}{3}\pi \cdot R^3$

Weitere Aufgaben

---

1. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a soll das größte gleichschenklige Dreieck einbeschrieben werden.

   Wie müssen die Abmessungen dieses Dreiecks gewählt werden?



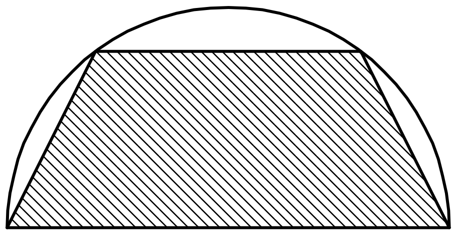
---

2. Einer Kugel mit dem Radius R wird die quadratische Pyramide mit dem größten Rauminhalt einbeschrieben. Wie groß ist dieser?

---

3. Einem Halbkreis soll ein gleichschenkliges Trapez mit dem größten Flächeninhalt einbeschrieben werden.

   Wie müssen sind die Abmessungen des Trapezes geählt werden?



6.2 Steckbriefaufgaben

Bei Steckbriefaufgaben ist ein Funktionensterm f(x) einer Funktion f mit vorgegeben Eigenschaften gesucht.

Eigenschaften, die gegeben sein können, sind

- Angabe von Punkten, durch die der Graph der gesuchten Funktion f geht, oder von Nullstellen
- Abgabe von Symmetrieeigenschaften
- Angabe von Definitionlücken
- Angabe der Gleichungen von Asymptoten
- Angabe einer Stelle, an der der Graph von f eine bestimme Steigung hat
- Angabe einer Wendestelle des Graphen von f

Allgemeines Lösungsverfahren

1. Aufstellen eines allgemeinen Funktionsterms f(x) vom gesuchten Funktionstyp
2. Berechnung von f '(x) und f ''(x)
3. Aufstellen eines Gleichungssystems

Beispiel 1

Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat die Nullstelle $x = 2$ und ihr Graph besitzt den Tiefpunkt $H\left(1 \mid 9\right)$.

Bestimmen eine die Funktionsgleichung der Funktion.

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$$\begin{array}{rl|rcl} f(2) = 0 \Rightarrow & (1) & 16a + 4b + c & = & 0 \\ f(1) = 9 \Rightarrow & (2) & a + b + c & = & 9 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow & (3) & 4a + 2b & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcll} (1)-(2) & 15a+3b & = & -9 & (4) \\ (3) & b & = & -2a & (3') \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (3') \text{ in } (4) & 15a-6a = -9 \Rightarrow a = -1 \end{array}$$

Also $f(x) = -x^4+2x^2+8$

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, deren Graph im Ursprung einen Wendepunkt mit der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten als Tangente und im Punkt $H\left(2\,|\,4\right)$ einen Hochpunkt hat.

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d \quad\Rightarrow$

$$f''(x) = 12ax^2+6bx+2c$$

Wegen $f(0) = e = 0$ und $f''(0) = 2c = 0 \quad\Rightarrow\quad c = 0$ muss gelten

$$\begin{array}{rr|rcl} f(2) = 4 \Rightarrow & (1) & 16a+8b+2d & = & 4 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow & (2) & 32a+12b+d & = & 0 \\ f'(1) = 1 \Rightarrow & (3) & d & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot(1)-(2) & 4b+3d = 8 \Rightarrow b = \frac{5}{4} \end{array}$$

Also $f(x) = -\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^3+x$

Beispiel 3

Wie lautet die Gleichung einer punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion 5. Grades, deren Graph den Wendepunkt in W(1|-2) hat und deren Wendetangente eine Steigung hat, die 16 mal so groß ist wie die Steigung der Funktion im Ursprung?

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 20ax^3 + 6bc$

$$\begin{array}{rcl|rcl} f(1) = -2 & \Rightarrow & (1) & a+b+c & = & -2 \\ f''(1) = 0 & \Rightarrow & (2) & 20a+6b & = & 0 \\ f'(1) = 16 \cdot f'(0) & \Rightarrow & (3) & 5a+3b+c & = & 16c \end{array}$$

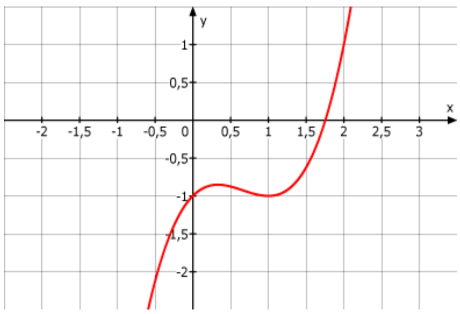
$$\begin{array}{r|rcll} 15 \cdot (1)+(3) & 20a+18b & = & -30 & (4) \\ (2) & a & = & -0{,}3b & (2') \end{array}$$

$$(2') \text{ in } (4) \;\Big|\; -6b+18b = -30 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

Also $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{4}x$

Beispiel 4

Bestimme eine Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion dritten Grades mit nebenstehendem Graphen.



Lösungshinweis:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + f \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Man entnimmt der Figur die Bedingungen

(1) $f(0) = -1$ (2) $f'(1) = 0$ (3) $f(1) = -1$ (4) $f(2) = 1$

Beispiel 5

Die Funktion f hat die Polstelle $x = -1$ und die Extremstelle $x = 1$

und ihr Graph besitzt die Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Ermittle eine mögliche Funktionsgleichung von f.

Lösung:

Ansatz: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{a}{x+1}$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{(x+1)^2}$

Bedingung: $f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{a}{(1+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

Beispiel 6

$f(x) = a \cdot e^{bx}$ berührt die Gerade $y = mx$ im Punkt $B(2 \mid 1)$.

Bestimme den Funktionsterm von f.

Lösung:

$f(x) = a \cdot e^{bx} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ab \cdot e^{bx}$

(1) $f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot e^{2b} = 1$

(2) $f'(2) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad ab \cdot e^{2b} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{e}$

$f(x) = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x - 1}$

6.3 Modellierung

Beispiel 1

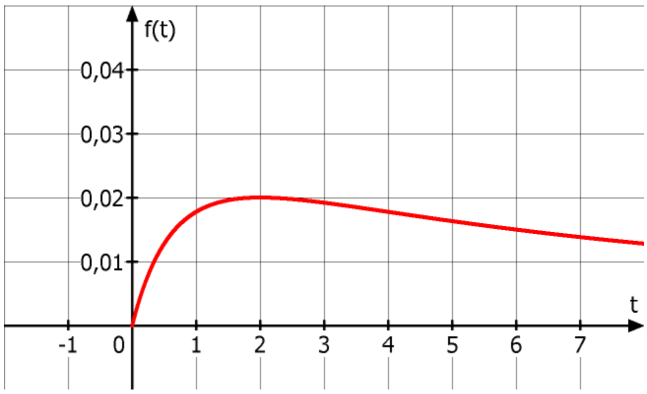
Die Konzentration eines Medikamentes (in $\frac{mg}{cm^3}$) im Blut eines Patienten lässt sich durch die

Funktion f mit dem Funktionsterm $f(t) = \frac{0{,}16t}{(t+2)^2}$ beschreiben.

Dabei sei t die Zeit gemessen in Stunden seit der Einnahme des Medikaments.

Der Graph der Funktion sieht in einem

Teil des Definitionsbereichs so aus:



a) Berechnen Sie die anfängliche Änderungsrate der Konzentration und vergleichen Sie diese mit der mittleren Änderungsrate in den ersten 6 Minuten.

b) Wann ist die Konzentration am größten und wie groß ist sie?

Wann ist die Konzentration nur noch halb so groß?

c) Zu welchem Zeitpunkt ändert sich die Änderungsrate am stärksten?

Lösung:

a) $f'(t) = 0{,}16 \cdot \frac{1 \cdot (t+2)^2 - t \cdot 2 \cdot (t+2)}{(t+2)^4} = 0{,}16 \cdot \frac{2-t}{(t+2)^3}$

$f'(0) = 0{,}04$ und $m_S(0;\, 6) = \frac{f(6) - f(0)}{6-0} = \frac{0{,}015-0}{6} = 0{,}0025$

b) $f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$ und $f(2) = 0{,}02$

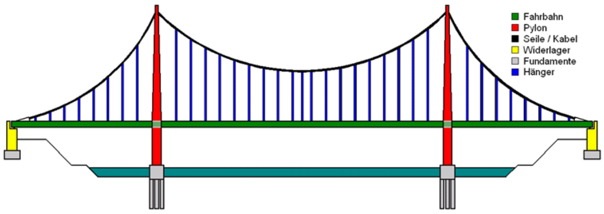
$f(x) = \frac{0{,}16t}{(t+2)^2} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad 16t = t^2+4t+4 \quad \Rightarrow \quad t = 6+4\sqrt{2} \approx 11{,}7$

c) $f''(t) = 0{,}16 \cdot \frac{-1 \cdot (t+2)^3 - (2-t) \cdot 3 \cdot (t+2)^2}{(t+2)^6} = 0{,}16 \cdot \frac{2t-8}{(t+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4$

Beispiel 2

Das Seil einer Hängebrücke mit 200m Breite kann durch eine Kettenlinie angenähert werden.

Diese ist der Graph einer Funktion $f_{a,c}$ mit $f_{a,c}(x) = y = \frac{a}{2c}\cdot(e^{cx} + e^{-cx})$ mit $a, c \in \mathbb{R}^+$.



Dabei werden x und y in Metern gemessen.

a) Untersuchen Sie den Graph von $f_{a,c}$ auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie das Minimum von $f_{a,c}$ in Abhängigkeit von a und c.

c) Bestimmen Sie a und c so, dass das Seil seinen tiefsten Punkt 5m über der Fahrbahn erreicht, die beiden Pylone einen Abstand von 200m haben und 30m hoch sind.

d) Bestimmen Sie die Steigung des Seils in den beiden Aufhängepunkten.

c) Auf welcher Strecke könnte ein Stuntman mit einem Motorrad das Seil befahren, wenn er maximal eine Steigung von 20% bewältigen kann?

Lösung:

a) $f_{a,c}(-x) = \frac{a}{2c}\cdot(e^{-cx} + e^{-c(-x)}) = f_{a,c}(x)$

b) $f_{a,c}'(x) = \frac{a}{2}\cdot(e^{cx} - e^{-cx}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ und damit $y_{min} = \frac{a}{c}$

c) (1) $\frac{a}{c} = 5 \;\Rightarrow\; a = 5c$ und (2) $f_{a.c}(100) = \frac{a}{2c}\cdot(e^{100c} + e^{-100c}) = 30$

(1) in (2) $e^{100c} + e^{-100c} = 12$

Substitution:

$u := e^{100c} \quad \Rightarrow \quad u + \frac{1}{u} = 12 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 12u + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 6 - \sqrt{35} \;\vee\; u = 6 + \sqrt{35}$

Wählt man c positiv, dann ist $c = \frac{1}{100} \cdot \ln(6 + \sqrt{35}) \approx 0{,}02478$ und damit $a \approx 0{,}1239$.

d) $e^{100c} = 6 + \sqrt{35}$ und $e^{-100c} = 6 - \sqrt{35}$ und damit

$f_{a,c}'(100) = 6a \approx 0{,}74$

e) $f_{a,c}'(x) = \frac{a}{2} \cdot (e^{cx} - e^{-cx}) = 0{,}2$

Mit der Substitution $u := e^{cx}$ ergibt sich

$$u - \frac{1}{u} = \frac{0{,}4}{a} \quad \Rightarrow \quad u^2 - \frac{0{,}4}{a} \cdot u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{0{,}2 - 0{,}2\sqrt{1 + 25a^2}}{a} \ \vee \ u = \frac{0{,}2 + 0{,}2\sqrt{1 + 25a^2}}{a}$$

Einsetzen und Resubstitution ergibt $x_{max} \approx 50{,}7$ m

---

6.4 Funktionscharen

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - 3k^2x$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Diskutieren Sie die Scharfunktionen und zeichnen Sie den Graph von f_1.

b) Bestimmen Sie k so, dass

i) der Graph von G_k von f_k durch den Punkt $P\left(2 \mid 5\right)$ geht.

ii) die Gerade $y = -x$ den Graphen von f_k im Koordinatenursprung berührt.

iii) die Extrempunkte von G_k auf der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten liegen.

iv) die Tangente im Schnittpunkt von G_k mit der positiven x-Achse die Steigung 1 hat.

Lösung:

a) Symmetrie: $f_k(-x) = (-x)^3 - 3k^2 \cdot (-x) = -x^3 + 3k^2 \cdot x = -f_k(x)$

Der Graph jeder Scharfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinaten ursprung

Nullstellen: $f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 3k) = 0 \quad x = 0 \vee x = -k\sqrt{3} \vee x = k\sqrt{3}$

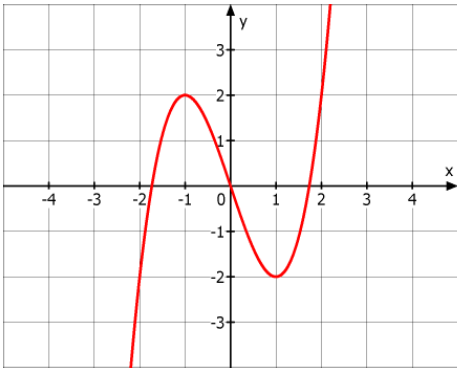
Extrema: $f_k'(x) = 3x^2 - 3k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -k \vee x = k$

$f_k''(x) = 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$f_k''(-k) = -6k < 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(-k \mid -2k^3)$ ist ein Hochpunkt

$f_k''(k) = 6k > 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(k \mid 2k^3)$ ist ein Tiefpunkt

Wendepunkte: $f_k'''(x) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$ ist ein Wendepunkt b)



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = x^2 - kx^3$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Diskutieren Sie die Scharfunktionen und zeichnen Sie den Graph von $f_{0,25}$.

Beispiel 3

Zeigen Sie, dass jede Scharfunktion f_a mit

a) $f_a(x) = (x-a)\cdot e^{2x}$ b) $f_a(x) = \dfrac{2x^2}{x+a}$, $a \neq 0$

einen lokalen Tiefpunkt besitzt und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

Lösung:

a) $f_a'(x) = 1\cdot e^{2x} + (x-a)\cdot 2^{2x}\cdot 2 = (2x-2a+1)\cdot e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2a-1}{2}$

$f_a''(x) = 2\cdot e^{2x} + (2x-2a+1)\cdot e^{2x}\cdot 2 = (4x-4a+3)\cdot e^{2x}$

$f_a''(\dfrac{2a-1}{2}) = (4\cdot\dfrac{2a-1}{2} - 4a+3)\cdot e^{2\cdot\frac{2a-1}{2}} = -e^{2a-1} < 0$ für alla a.

$T\left(\dfrac{2a-1}{2} \mid -\dfrac{1}{2}e^{2a-1}\right)$

b) $f_a'(x) = \dfrac{4x\cdot(x+a) - 2x^2\cdot 1}{(x+a)^2} = \dfrac{2x^2+4ax}{(x+a)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2a \vee x = 0$

$a > 0$

	$-\infty < x < -2a$	$-2a < x < -a$	$-a < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f_a'(x)$	+	−	−	+

$T\left(0 \mid 0\right)$ ist Tiefpunkt des Graphen einer Scharfunktion

$a < 0$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < -a$	$-a < x < -2a$	$-2a < x < \infty$
$f_a'(x)$	+	−	−	+

$T\left(-2a \mid -8a\right)$ ist Tiefpunkt des Graphen einer Scharfunktion.

Beispiel 4

Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = 1 - \dfrac{2}{e^x + k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Diskutiere die Scharfunktionen und zeichne die Graph von f_1, f_2 und f_3.

Lösung:

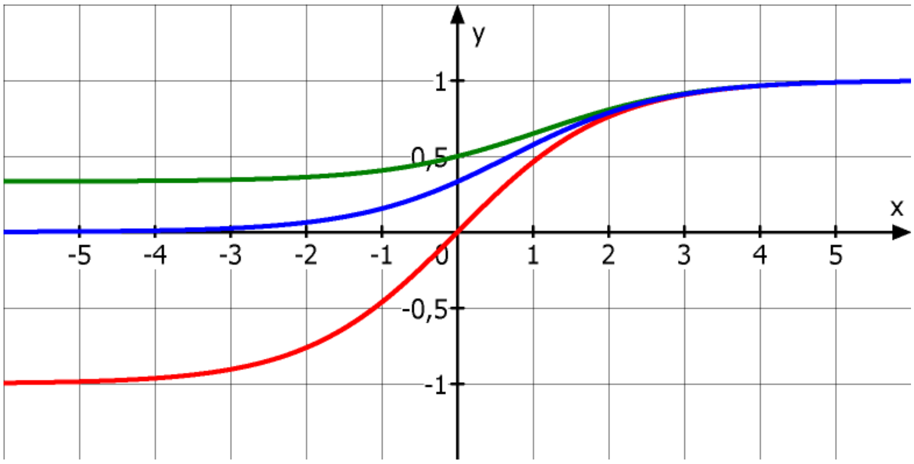
Nullstellen: $f_k(x) = 1 - \dfrac{2}{e^x + k} = 0 \;\Rightarrow\; e^x + k - 2 = 0 \;\Rightarrow\; e^x = 2 - k$

Für $k \geq 2$ besitzt eine Scharfunktion keine Nullstelle.

Für $0 < k < 2$ besitzt eine Scharkunktion die Nullstelle $x = \ln(2 - k)$

Grenzverhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = 1 - \dfrac{2}{k}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = 1$

Monotine: $f_k'(x) = \dfrac{2}{(e^x + k)^2} > 0$ d.h. f_k ist streng monoton wachsend.



Beispiel 5

Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{k + \ln x}{k - \ln x}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Die maximalen Definiionsmenge einer Scharfunktion sei D_k.

a) Bestimmen Sie D_k und die Nullstellen einer Scharfunktion in Abhängigkeit von k.

Begründen Sie, dass die Nullstelle jeder Funktion im Intervall $I =]0, 1[$ liegt.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen an den Rändern von D_k.

c) Untersuchen Sie das Montonieverhalten der Scharfunktionen.

d) Zeigen Sie, dass der Graph einer Scharfunktion genau einen Wendepunkt besitzt und berechnen Sie seine Koordinaten in Abhängigkeit von k.

e) Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in ein Koordinatensystem.

Lösung:

a) $D_k = \mathbb{R}^+ \backslash \{e^k\}$

$$f_k(x) = \frac{k + \ln x}{k - \ln x} = 0 \quad \Rightarrow \quad k + \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-k}$$

Für $0 < k < \infty$ gilt $0 < e^{-k} < 1$.

b) $$\lim_{x \to 0+0} \frac{k + \ln x}{k - \ln x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{k}{\ln x} + 1}{\frac{k}{\ln x} - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{k+\ln x}{k-\ln x} = \infty \text{ und } \lim_{x \to 0+0} \frac{k+\ln x}{k-\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k+\ln x}{k-\ln x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{k}{\ln x}+1}{\frac{k}{\ln x}-1} = -1$$

c) $$f_k'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(k-\ln x)-(k+\ln x)\cdot(-\frac{1}{x})}{(k-\ln x)^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{(k-\ln x)^2} > 0$$

Jede Scharfunktion ist in den zwei Intervallen, aus denen ihre Definitionsmenge besteht, jeweils streng monoton wachsend.

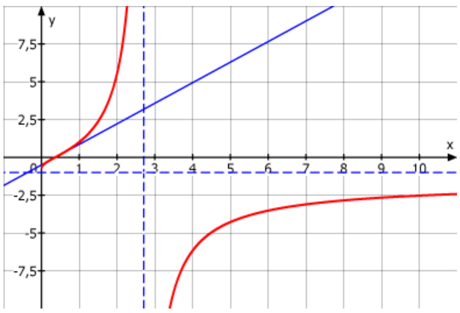
d) $$f_k''(x) = (-\frac{1}{x^2})\cdot\frac{2}{(k-\ln x)^2} + \frac{1}{x}\cdot(-4)\cdot\frac{1}{(k-\ln x)^3}\cdot(-\frac{1}{2x}) =$$

$$= -\frac{1}{x^2\cdot(k-\ln x)^2}\cdot(1-\frac{2}{k-\ln x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{k-2}$$

mit Vorzeichenwechsel an dieser Stelle.

Also ist $W\left(e^{k-2} \mid k-1\right)$ Wendepunkt eines Schargraphen.

e)



Beispiel 6

Gegeben Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = (\ln x)^2 + a\cdot\ln x$ und $a \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Scharfunktionen auf Symmetrie, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f_{-1}, f_0 und f_1 in ein gemeinsames Koordensystem.

c) Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema.

Lösung:

a) Symmetrie: Es ist $D_{f_a} = \mathbb{R}^+$. Also kann keine Symmetrie auftreten.

Nullstellen: $f_a(x) = (\ln x)^2 + a\cdot\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x\cdot(\ln x + a) = 0 \quad \Rightarrow$

$x = 1 \vee x = e^{-a}$

$a \neq 0$: Jede Scharfunktion die Nullstellen $x = 1$ und $x = e^{-a}$.

$a = 0$: Die Scharfunktion hat $x = 1$ als einzige Nullstelle.

Extrema: $f_a'(x) = 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} + a\cdot\frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{a}{2}}$

$$f_a''(x) = 2\cdot\frac{1}{x^2} + 2\cdot\ln x\cdot(-\frac{1}{x^2}) + a\cdot(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}\cdot(2 - 2\cdot\ln x - a)$$

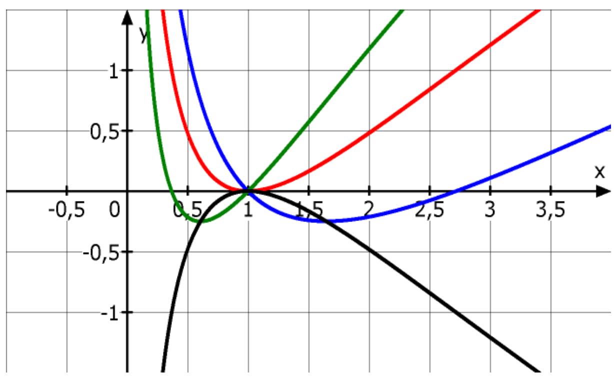
$$\Rightarrow \quad f_a''(e^{-\frac{a}{2}}) = \frac{2}{e^{-a}} > 0$$

Jede Scharfunktion hat den Tiefpunkt $T\left(e^{-a/2} \mid -a^2/4\right)$.

Wendepunkte: $f_a'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{2-a}{2}}$ mit Vorzeichenwechsel an dieser Stelle.

$W\left(x_w \mid y_W\right)$ mit $x_w = e^{\frac{2-a}{2}}$ und $y_W = \frac{4-a^2}{4}$ ist ein Wendpunkt.

b)



c) $x_T = e^{-\frac{a}{2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{a}{2} = \ln x_T$ und damit $y_T = -(\ln x_T)^2$

Orstkurve der Extrema: $y = -(\ln x)^2$
