7. Anwendungen

===

7.1 Exponentielles Wachstum

Beispiel 1:

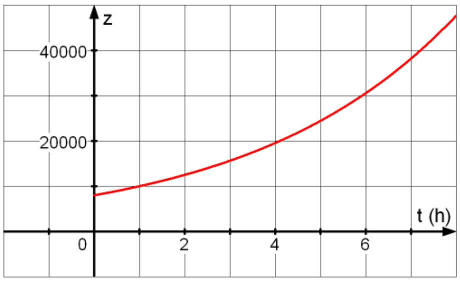
Die Anzahl der Keime in 1 cm^3 Milch wird im zeitlichen Abstand von 1 h bestimmt.

Zeit t in h	0	1	2	3	4	5
Anzahl z in Tausend	8	10,1	12,4	15,6	19,6	24,3

Auswertung:

z_{i+1}/z_i	1,26	1,23	1,26	1,26	1,24

Vermutung: $z(t) = 8 \cdot 10^3 \cdot 1{,}25^t$



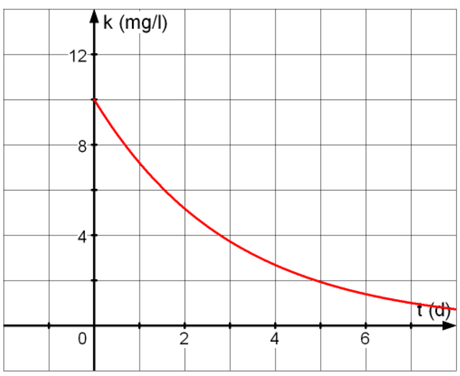
Zur Untersuchung der Langzeitwirkung eines Medikaments wurde einer Versuchsperson eine Dosis von 70 mg verabreicht und im zeitlichen Abstand von 24 h die Konzentration des Medikaments im Blut gemessen.

Zeit t in d	0	1	2	3	4	5
Konzentration k in mg/l	10	7,2	5,2	3,7	2,7	1,9

Auswertung:

k_{i+1}/k_i	0,72	0,72	0,71	0,73	0,70

Vermutung: $k(t) = 10\,\frac{mg}{l} \cdot 0{,}72^t$



Andert sich ein Bestand so, dass er sich in gleichen Zeiteinheiten stets um den gleichen Faktor vergrößert bzw. verkleinert, dann spricht man von exponentiellem Wachstum.

Der Bestand b in Abhängigkeit von der Zeit t ist dann gegeben durch

$$\boxed{b(t) = b_0 \cdot a^t}$$

Dabei ist b_0 der Bestand zur Zeit $t = 0$ und b(t) der Bestand zur Zeit t.

a heißt ***Wachstumsfaktor***.

Ist $a > 1$, dann nimmt der Bestand zu, ist $0 < a < 1$, dann nimmt der Bestand ab (Zerfall).

Der relative Zuwachs pro gewählter Zeiteinheit ist dann gegeben durch $\dfrac{b_0 \cdot a^{t+1} - b_0 \cdot a^t}{a - 1 b_0 \cdot a^t} = a - 1$

und wird meist in Prozent angegeben.

Exponentielles Wachstum bzw. exponentieller Zerfall lässt sich auch mit der natürlichen Exponentialfunktion beschreiben

$$b(t) = b_0 \cdot a^t \;\Big|\; \circ \ln$$

$$\ln b(t) = \ln\left(b_0 \cdot a^t\right) = \ln b_0 + \ln a^t = \ln b_0 + t \cdot \ln a \quad \Rightarrow \quad b(t) = e^{\ln b_0 + t \cdot \ln a} = b_0 \cdot e^{\ln a \cdot t} = b_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

mit $k = \ln a$.

Das exponentielles ***Wachstum*** bzw. der exponentielle ***Zerfall*** eines Bestandes b lässt sich durch Funktionen der Form

$$\boxed{b(t) = b_0 \cdot e^{k \cdot t}}$$

beschreiben.

Dabei ist $k = \ln a$ mit dem Wachstumsfaktor a und heißt ***Wachstumskonstante***.

Bemerkung:

Die momentane Wachstumsrate bzw. Zerfallsrate ist dann gegeben durch

$$\boxed{b'(t) = k \cdot b_0 \cdot e^{k \cdot t} = k \cdot b(t)}$$

d.h. sie ist proportional zum momentanen Bestand.

7.2 Verdoppelungs- und Halbwertszeit

Ist $k > 0$, dann nimmt der Bestand zu - ***positives Wachstum***.

Es gibt dann eine Zeit t_D, nach der sich der Bestand jeweils verdoppelt d.h.

$$2b_0 = b_0 \cdot e^{k \cdot t_D} \quad \Leftrightarrow \quad e^{k \cdot t_D} = 2$$

und damit

$$\boxed{t_D = \frac{\ln 2}{k}}$$ ***Verdoppelungszeit*** bei positvem exponentiellen Wachstum

Ist $k < 0$, dann nimmt der Bestand ab - und - ***negatives Wachstum***.

Es gibt dann eine Zeit t_H, nach der sich der Bestand jeweils halbiert d.h.

$$\frac{1}{2} b_0 = b_0 \cdot e^{k \cdot t_D} \quad \Leftrightarrow \quad e^{k \cdot t_D} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\boxed{t_H = -\frac{\ln 2}{k}}$$ ***Halbwertszeit*** bei negativem exponentiellen Wachstum

Bemekung:

Mit der Verdoppelungszeit t_D bzw. der Halbwertszeit t_H lassen sich positives bzw. negatives exponentielles Wachstum auch mit den Gleichungen

$$\boxed{b(t) = b_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_D}}} \text{ bzw. } \boxed{b(t) = b_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_h}}}$$

beschreiben.

Aufgabe in der Handreichung

Das ungebremste Wachstum von Bakterien lässt sich durch $A(t) = A_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ beschreiben, wobei t die Zeit, A(t) die von der Bakterienkultur zum Zeitpunkt t überdeckte Fläche und A_0 die überdeckte Fläche zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

λ ist eine für die jeweilige Bakterienart typische Konstante mit der Einheit $\frac{1}{d}$ (d Tag)

t in Tagen	2	3	5	7	8
A in cm^2	0,70	0,81	1,18	1,64	1,95

Für eine Bakterienkultur wird die folgende Messreihe aufgenommen:

a) Begründen Sie, dass sich gemäß dem Zusammenhang $A(t) = A_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ eine Gerade ergibt

wenn man in einem Koordinatensystem mit linearer Achsenskalierung ln A gegen t aufträgt.

Zeichnen Sie nun die Wertepaare $\left(t \mid \ln A\right)$ aus der gegebenen Messreihe in ein derartiges Koordinatensystem und tragen Sie eine mögliche Näherungsgerade ein.

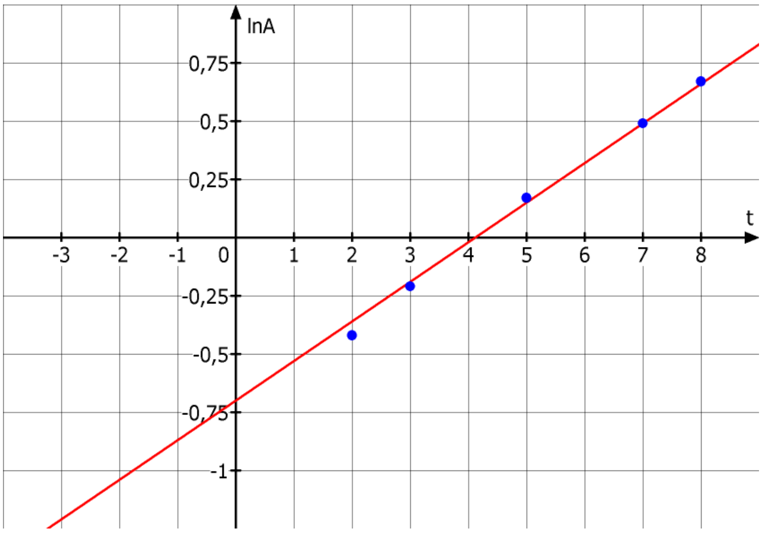
Erläutern Sie, wie sich A_0 und λ aus dem Diagramm ermitteln lassen und bestimmen Sie deren Werte.

$$\left(\text{zur Kontrolle}: \lambda \approx 0{,}17\ \frac{1}{d}\right)$$

b) Weisen Sie nach, dass grundsätzlich für die Verdoppelungszeit T der Bakterienkultur $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ gilt und berechnen Sie T.

Lösung

a) $\ln A = \ln A_0 + \lambda \cdot t$ Gleichung einer Geraden mit der Steigung λ und dem y-Abschnitt $\ln A_0$



$\ln A = 0{,}17 \cdot t + 0{,}7$

λ ist die Steigung der Geraden und $\ln A_0 = -0{,}7 \quad \Rightarrow \quad A_0 = e^{-0{,}7} \approx 0{,}5$

b) $2 \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{\lambda \cdot T} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda \cdot T} = 2 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

$T = 4$

7.3 Extremwertaufgaben

Bespiel 1:

Welche zwei Zahlen mit der Summe 10 haben das

a) kleinste b) größte

Produkt?

Hauptbedingung: $P(x; y) = x \cdot y$

Nebenbedingung: $x + y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 10 - x$

Zielfunktion: $f(x) = x \cdot (10 - x)$

Extremstellen: $f'(x) = 10 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5$

$f''(x) = -2 < 0$

a) $x = y = 5$ ergibt den größten Produktwert.

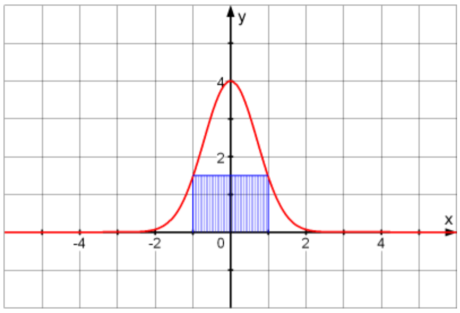
b) Der Produktwert kann beliebig klein werden.

Bespiel 2:

Der Fläche zwischem Graphen der Funktion
$f: x \to 4 \cdot e^{-x^2}$

und der x-Achse wird ein Rechteck mit möglichst großem Inhalt einbeschrieben.

Wie groß ist der Flächenhalt dieses Rechtecks?



Hauptbedingung: $A(x;\, y) = 2x \cdot y \text{ mit } x,\, y > 0$

Nebenbedingung: $y = 4 \cdot e^{-x^2}$

Zielfunktion: $g(x) = 2x \cdot 4 \cdot e^{-x^2} = 8x \cdot e^{-x^2}$

Extremstellen: $g'(x) = 8 \cdot e^{-x^2} + 8x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 16x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Montonie:

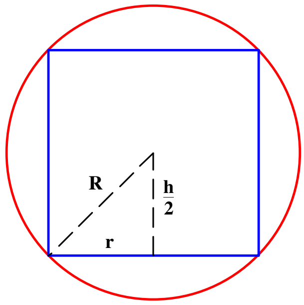
	$-\infty < x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\infty < x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Der maximale Flächeninhalt ist gleich $4 \cdot \sqrt{\frac{2}{e}}$.

Beispiel 3:

Einer Kugel mit dem Radius R wird ein Zylinder mit möglichst großem Inhalt einbeschieben.

Bestimme das Volumen dieses Zylinders!



Hauptbedingung: $V(r;h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ mit $x, y > 0$

Nebenbedingung: $\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

Zielfunktion: $f(h) = \pi \cdot \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot \frac{h^3}{4}$

Extremstellen: $f'(x) = \pi \cdot R^2 - \frac{3}{4}\pi \cdot 2h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{3}}$

Wegen $k(0) = k(2r) = 0$ liegt ein Maximum vor.

Es ergibt sich ein maximales Volumen von $V_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi \cdot R^3$.

Beispiel 4 :

Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10000 kg verkauft.

Eine Marktforschungsstudie hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,20 € je kg jeweils zu einer Absatzsteigerung von 1000 kg im Monat führen würde.

Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

Zielfunktion: $g(x) = (10000 + 1000 \cdot x) \cdot (20 - 0{,}2 \cdot x - 14) = (10000 + 100 \cdot x) \cdot (6 - 0{,}2 \cdot x)$

Extremstellen: $g'(x) = 1000 \cdot (6 - 0{,}2 \cdot x) + (10000 + 1000 \cdot x) \cdot (-0{,}2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad -400x + 4000 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$

Wegen $g''(x) = -400 < 0$

ist der Gewinn maximal, wenn man den Preis pro kg um 2 € erniedrigt.

Das Lösen von Extremwertaufgaben erfolgt nach dem Schema

Hauptbedingung: Berechnungsterm für zu optomierende Größe

Nebendingungen: Rückführung des Problems auf eine Variable

Zielfunktion: Aufstellen der Funktion, deren Extrema gesucht sind

Extrema: Bestimmung der Extrem nach Art und Lage

Aufgabe in der Handreichung

Von den im I. Quadranten liegenden Punkten der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ soll derjenige Punkt E berechnet werden, für den die Entfernung zum Punkt $P\left(0 \mid 4{,}5\right)$ minimal wird.

a) Bestimmen Sie einen Term für die Entfernung eines Punktes $\left(x \mid x^2\right)$ von P und zeigen Sie, dass diese Entfernung genau dann minimal wird, wenn die Funktion r mit

$r(x) = x^4 - 8x^2 + 4{,}5^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ ein Minimum annimmt.

b) Berechnen Sie mithilfe der Funktion r die Koordinaten von E.

[Zur Kontrolle: $E\left(2 \mid 4\right)$]

c) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade PE ein Lot zur Normalparabel im Punkt E ist.

a) Der Abstand wird maximal, wenn sein Quadrat maximal wird.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für diesen Abstand

$$r(x) = x^2 + (x^2 - 4{,}5)^2 = x^4 - 8x^2 + 4{,}5^2$$

b) $r'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

Vorzeichenbetrachtung

x	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
r'(x)	–	+	–	+

Für $E\left(2 \mid 4\right)$ wird der Abstand miniml.

Normale in E $y = -\frac{1}{4}\cdot(x-2)+4 = -\frac{1}{4}x + 4{,}5$

P liegt als auf der Normalen.

Aufgabe in der Handreichung

Eine Konservendose hat die Form eines geraden Kreiszylinders. Die Dose soll das Volumen 120 cm^3 fassen.

Ihre Abmessungen sollen so gewählt werden, dass die Oberfläche minimal wird.

Hauptbedingung: $O = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Nebenbedingung: $\pi \cdot r^2 \cdot h = V_0$

Zielfunktion: $f(r) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{V_0}{\pi \cdot r^2} = 2\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{V_0}{r}$

Extremstellen: $f'(r) = 4\pi \cdot r - 2 \cdot \frac{V_0}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$

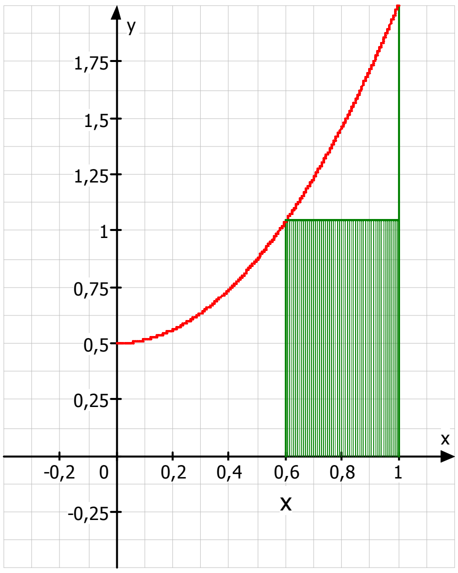
Eine Vorzeichenbetrachtung der Ableitung ergibt, dass einen Minimumm vorliegt.

Für den gegebenen Zahlewert ergibt sich $r \approx 5{,}7$ cm **und**

Aufgabe in der Handreichung

Aus rechteckigen Kunststoffplatten von 1 Meter Breite und 2 Meter Höhe wurden Stücke abgeschnitten, wobei die Schnittkurve Teil einer Parabel mit der Gleichung $y = 1{,}5x^2 + 0{,}5$ ist.

Aus der Restplatte werden Rechtecke - wie in der Skizze dargestellt - ausgeschnitten. Je eine Seite des Rechtecks sollauf dem unteren bzw. auf dem rechten Rand der Platte zuliegen kommen, eine Ecke des Rechtecks soll auf derSchnitt kurve liegen.



a) Zeigen Sie, dass für den Inhalt eines solchen Rechtecks gilt:

$A(x) = 0{,}5\cdot(-3x^3 + 3x^2 - x + 1)$, wobei $0 \le x \le 1$ ist

.

b) Weisen Sie nach, dass es genau eine Stelle x_w gibt, an der die 1. Ableitung von A gleich Null wird. Begründen Sie weiter, dass A an der Stelle x_w nicht extremal wird.

c) Dennoch gibt es ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt. Welche Seitenlängen hat es?

Lösung

a) $A(x) = (1-x)\cdot(1{,}5x^2 + 0{,}5) = 0{,}5\cdot(-3x^3 + 3x^2 - x + 1)$

b) $A'(x) = 0{,}5\cdot(-9x^2 + 6x^2 - 1) = -0{,}5\cdot(3x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

Da A streng monoton fallend ist, liegt kein Extremum vor.

c) Für $x = 1$ erhält man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt.

Es ist 1m lng und 0,5 m breit.

Zusätzliche Aufgaben

Welche gerade quadratische Pyramide mit gegeben Seitenkante Seitenkante s hat den größten Rauminhalt?

Einer Halbkugel mit dem Radius R wird ein gerades quadratisches Prisma einbeschrieben. Für welche Abmessungen hat dieses Prisma den größen Rauminhalt?

Einer Halbkugel mit dem Radius R wird ein Zylinder einbeschrieben. Für welche Abmessungen hat dieser Zylinder den größen Rauminhalt?
