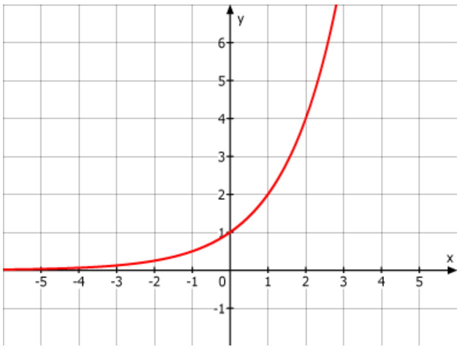
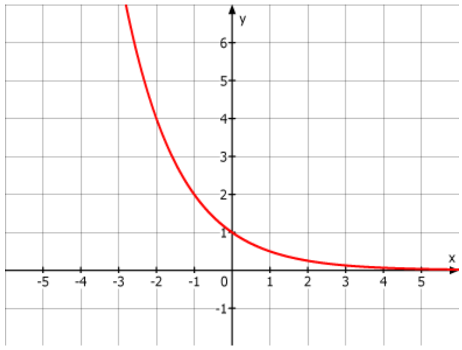
5. Die natürliche Exponentialfunktion und natürliche Logarithmusfunktion

===

5.1 Die natürliche Exponentialfunktion



$$f : x \rightarrow 2^x$$



$$f : x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Eine Funktion der Form $f\ : a \rightarrow a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt ***Exponentialfunktion*** zur Basis a.

Für alle Exponentialfunktionen gelten die Gleichungen

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Weiter gilt.

1. Die Exponentialfunktionen $0 < a < 1$ sind streng monoton fallend mit

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} a^x = 0+0$$

Die Exponentialfunktionen mit $1 < a < \infty$ sind streng monoton steigend mit

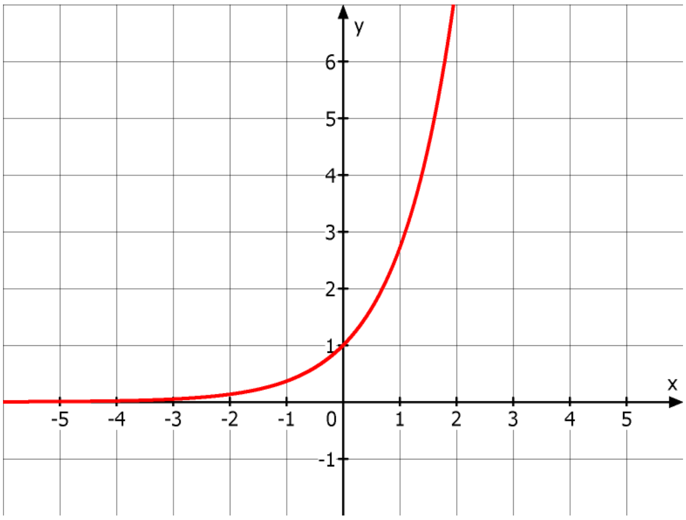
$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0+0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

2. Die Graphen der Exponentialfunktionen

$x \to a^x$ und $x \to \left(\frac{1}{a}\right)^x$

gehen durch durch Spiegelung an y-Achse auseinander hervor.

3. Die Graphen aller Exponentialfunktionen schneiden sich im Punkt $\left(0 \mid 1\right)$.



Die Exponentialfunktion

$$\exp : x \to e^x \text{ mit } e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281.....$$

heißt ***natürliche Exponentialfunktion***.

Die Zahl e heißt ***Eulersche Zahl*** und ist ***transzendent***.

Die natürliche Exponentialfunktion ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Bemerkungen:

a) Jede Stammfunktion der natürlichen Exponentialfunktion hat die Form $F(x) = e^x + C$.

b) Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenzfunktion mit positivem Expnenten

d.h. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^r} = \infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$ für alle $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

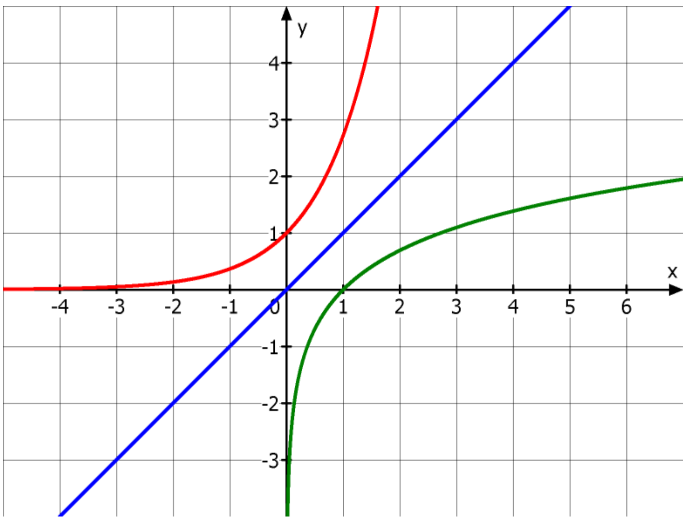
c) Die Wertemenge der natürlichen Exponentialfunktion ist $W = \mathbb{R}^+$.

d) Die natürliche Expontialfunktion ist streng monoton wachsend.

e) Die Tangente an den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion im Punkt $\left(0 \mid 1\right)$ hat die Gleichung $x = x + 1$

f) Da die natürliche Exponentialfunktion wegen $(e^x)'' = e^x > 0$ ist, gilt $e^x \geq x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5.2 Die natürliche Logarithmusfunktion



$y = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_e x$

Die natürliche Exponentialfuntktion ist umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion ist die Logarithmusfunktion zur Basis e

$\log_e : x \to \log_e x$

Man nennt diese Logarithmusfunktion den natürlichen Logarithmus und schreibt

$\log_e x = \ln x$ (***logarithmus naturalis***).

Die natürliche Logarithmusfunktion ist in in ihrer Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Da die natürliche Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist gilt

$$\boxed{\ln e^x = x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } \boxed{e^{\ln x} = x} \text{ für } x > 0$$

Für den natürlichen Logarithmus gelten die Gleichungen

$$\boxed{(1)\ \ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)}$$

(2) $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$

(3) $\ln x^r = r \cdot \ln x$

Bemerkungen:

a) Es gilt

a) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

b) Die natürliche Logarithmusfunktion wächst schwächer als jede Potenzfunktion mit positivem Exponenten d.h.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \text{ bzw. } \lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{\ln x^x} = \infty \text{ für alle } r \in \mathbb{R}, r > 0$$

c) Es ist $\lim\limits_{x \to 0+0} (x^r \cdot \ln x) = 0 - 0$ für alle $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

d) Die Wertemenge der natürlichen Logarithmusfunktion ist $W = \mathbb{R}$

e) Die Tangente im Schnittpunkt des Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion mit der x-Achse hat die Gleichung $y = x - 1$.

Da die natürliche Logarithmusfunktion rechtsgekrümmt ist, gilt $\ln x \leq x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

f) Die Funktion $F : x \to \ln|x|$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist Stammfunktion $f : x \to \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5.4 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Zur Lösung von Exponentialgleichung d.h. Gleichungen bei denen die Lösungsvariable im Exponenten einer Potenz vorkommt, benutzt man im allgemeinen den natürlichen Logarithmus.

A Grundform

Beispiel: $\boxed{a^x = b}$

$$a^x = b \quad \Big| \circ \ln$$

$$\ln a^x = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

B Produkte von Potenzen, welche nicht weiter zusammengefasst werden können

Beispiel: $\boxed{a^x \cdot b^x = c}$

$$a^x \cdot b^x = c \quad \Big| \circ \ln$$

$$\ln(a^x \cdot b^x) = \ln c \quad \Leftrightarrow \quad \ln a^x + \ln b^x = \ln c \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln a + x \cdot \ln b = \ln c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (\ln a + \ln b) = \ln c \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln c}{\ln a + \ln b}$$

C Summe von Potenzen, die durch Ausklammern in ein Produkt umgewandelt werden kann

Beispiel: $\boxed{b^{x+1} + b^{x-1} = c}$

$$a^{x+1} + a^{x-1} = b \quad \Leftrightarrow \quad a^{x-1} \cdot (a^2 + 1) = b \quad \Big| \circ \ln \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(a^x \cdot (a^2 + 1)\right) = \ln b \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln a^{x-1} + \ln(a^2 + 1) = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1) \cdot \ln a = \ln b - \ln(a^2 + 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 1 = \frac{\ln b - \ln(a^2 + 1)}{\ln a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{\ln b - \ln(a^2 + 1)}{\ln a} = \frac{\ln a + \ln b - \ln(a^2 + 1)}{\ln a} = \frac{\ln \frac{ab}{a^2+1}}{\ln a}$$

D Summe, welche durch Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt.

Beispiel:

$$\boxed{a^{2x} + a^x + b = 0}$$

Substitution: $u := a^x$

$u^2 + u + b = 0$

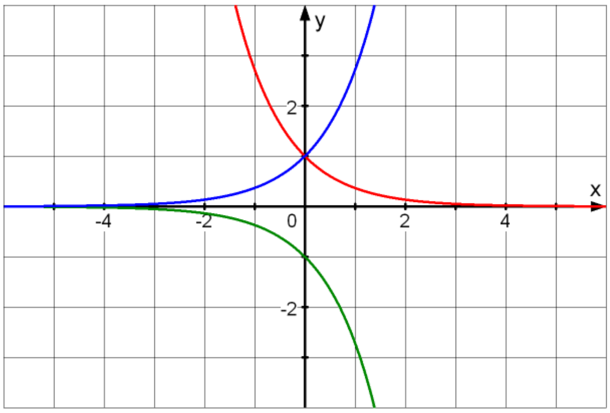
Sind u_1 und u_2 die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen, dann ergeben sich die Lösungen aus der

Resubstitution: $a^x = u_1 \vee a^x = u_2$

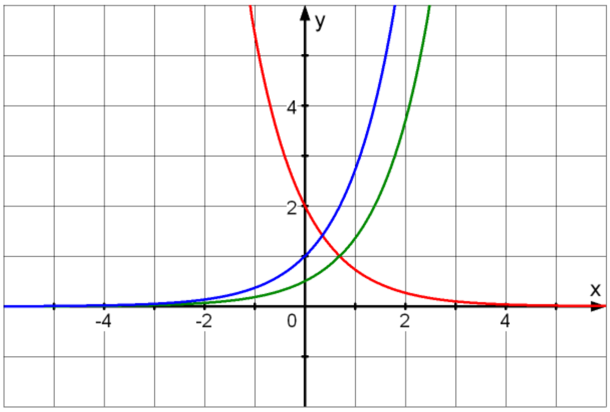
5.5 Graphen von Exponentialfunktion und Kurvendiskussion

Beispiele:

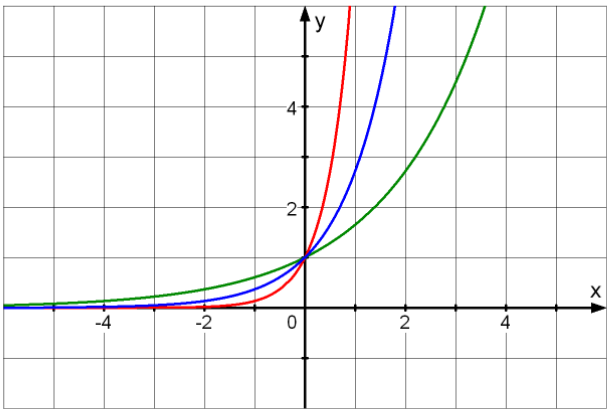
A $\boxed{f: x \to e^{-x}}$ und $\boxed{h: x \to -e^{x}}$



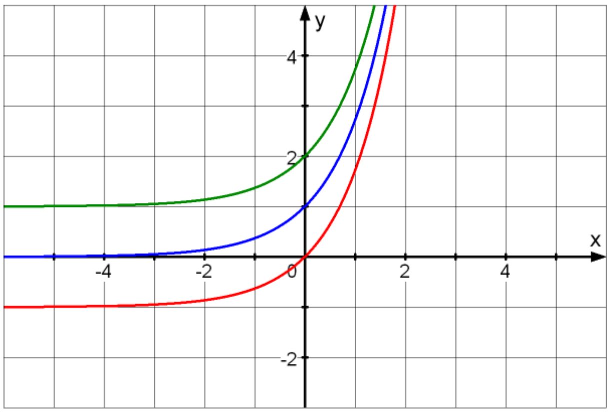
B $\boxed{f: x \to 2 \cdot e^{2x}}$ und $\boxed{f: x \to \frac{1}{2} \cdot e^{x}}$



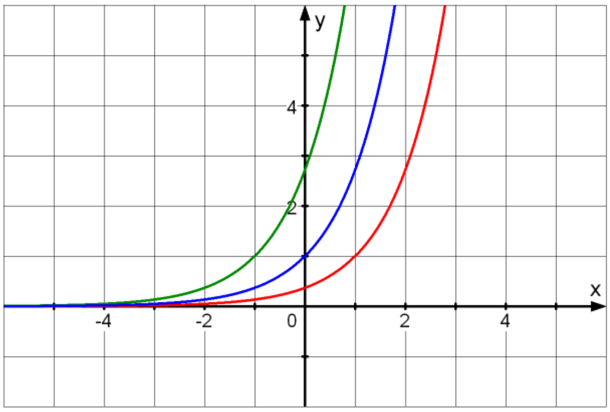
C $\boxed{f: x \to e^{2x}}$ und $\boxed{f: x \to e^{\frac{1}{2}x}}$



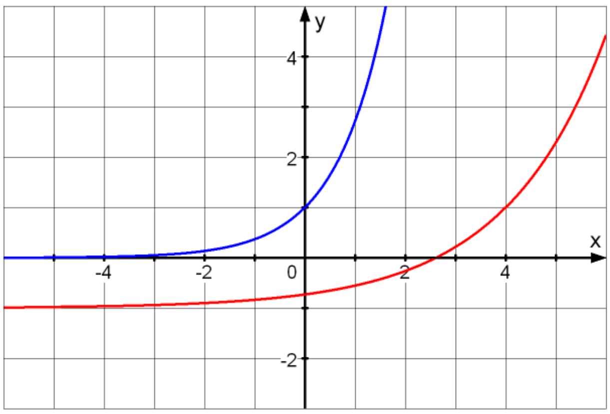
D $\boxed{f: x \rightarrow e^x - 1}$ und $\boxed{f: x \rightarrow e^x + 1}$



E $\boxed{f: x \rightarrow e^{x-1}}$ und $\boxed{f: x \rightarrow e^{x+1}}$



F $\boxed{f: x \rightarrow 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-2} - 1}$



G $\boxed{f: x \to x - e^x}$

1. Definitionsmenge

$D = \mathbb{R}$

2. Symmetrie

Es liegt keine Symmetrie des Graphen vor.

3. Verhalten am Rande des Dfinitionsbereichs

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - e^x) = -\infty \text{ da } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ und } \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x - e^x) = \lim_{x \to \infty} \left(e^x \cdot \left(\frac{x}{e^x} - 1\right) \right) = -\infty$$

4. Nullstellen bzw. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - e^x = 0$

Die Gleichung besitzt keine Lösung, da $e^x \geq x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 0 - e^0 = -1$ ergibt $S_y\left(0 \mid -1\right)$

5. Monotonie und Extrema

$f'(x) = 1 - e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	$+$

f ist für $-\infty < x \leq 0$ streng monoton steigend und für $0 \leq x < \infty$ streng monoton fallend

und daher ist $E\left(0 \mid -1\right)$ ein Hochpunkt des Graphen.

6. Wendepunkte und Krümmungsverhalten

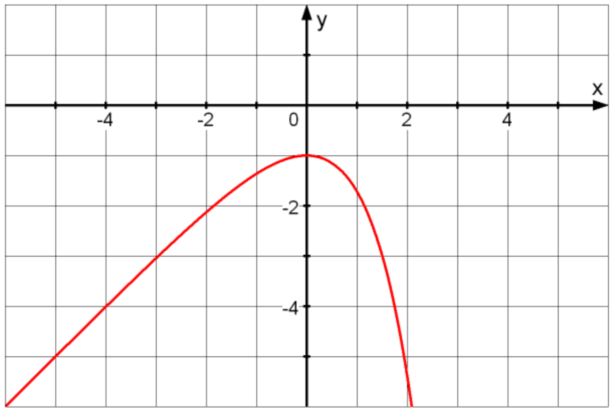
$f''(x) = -e^x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in ganz D rechtsgekrümmt.

7. Wertemenge

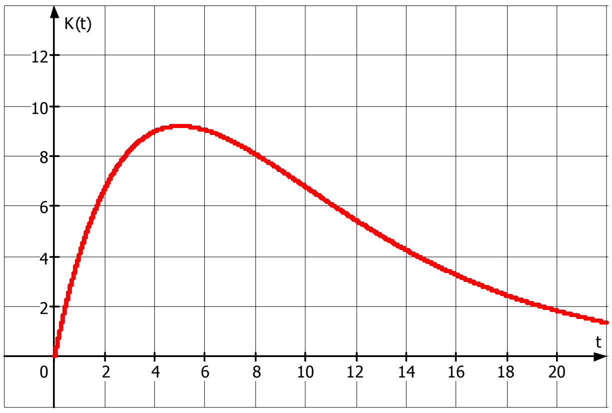
$W =]-\infty; -1]$

8. Graph



Aufgabe in der Handreichung

Konzentration eines Medikaments im Blut



Die Funktion K mit

$K(t) = 5t \cdot e^{-0,2 \cdot t}$ und $t \geq 0$

beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten in Abhängigkeit von der Zeit t.

Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und K(t) in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gemessen.
Die Abbildung zeigt den Graph von K.

a) Das Medikament ist wirksam, wenn die Konzentration im Blut mindestens 4 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ beträgt.

Entnehmen Sie der Zeichnung den Zeitraum, in dem das Medikament wirksam ist.

b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Konzentration ihren höchsten Wert erreicht hat, und bestimmen Sie das Maximum der Konzentration.

c) Begründen Sie durch Rechnung, nach welcher Zeit das Medikament am stärksten abgebaut wird.

Bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Konzentration.

d) Ab dem Zeitpunkt $t = 10$ werde die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von K beschrieben.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament gemäß dieser Näherung vollständig abgebaut ist.

e) Nun wird wieder die ursprüngliche Beschreibung der Konzentration durch K verwendet. Zwölf Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen.

Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren.

Geben Sie den Term einer Funktion G an, die die Konzentration des Medikaments nach er neuter Einnahme beschreibt.

Lösung

a) Das Medikament ist eine Stunde bis 14,3 Stunden nach der Einnahme wirksam.

b) $K'(t) = 5 \cdot e^{-0,2 \cdot t} + 5 \cdot t \cdot e^{-0,2 \cdot t} \cdot (-0,2) = (5 - t) \cdot e^{-0,2 \cdot t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 5$

$K(5) = 25 \cdot e^{-1} \approx 9,2$

Das Maximum der Konzentration im menschlichen Körper ist nach 5 h erreicht. Die maximale Konzentration beträgt $9,2 \ \frac{mg}{l}$.

c) Die Konzentration wird am stärksten abgebaut, wenn die K' einen Tiefpunkt hat.

$K''(t) = -1 \cdot e^{-0,2 \cdot t} + (5 - t) \cdot e^{-0,2 \cdot t} \cdot (-0,2) = (0,2t - 2) \cdot e^{-0,2 \cdot t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10$

	$0 < t < 10$	$10 < r < \infty$
K''(t)	$-$	$+$

$K'(10) = -5 \cdot e^{-2} \approx 0,68$

Die Konzentration wird als zur $t = 10$ Abbaurate hat also bei $t = 0$ am stärksten abgebaut.

Die Abbaurate beträgt $-0{,}68\ \frac{mg}{l \cdot h}$.

d) Tangente: $y = -\frac{5}{e^2} \cdot (x - 10) + \frac{50}{e^2}$

Nullstelle: $x = 20$

Nach dieser Näherung ist das Medikament nach 20 h abgebaut.

e) $G(t) = 5t \cdot e^{-0{,}2 \cdot (t+5)} + 5t \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$

Dabei ist die Zeit nach t nach der Einnahme der zweiten Dosis gerechnet.