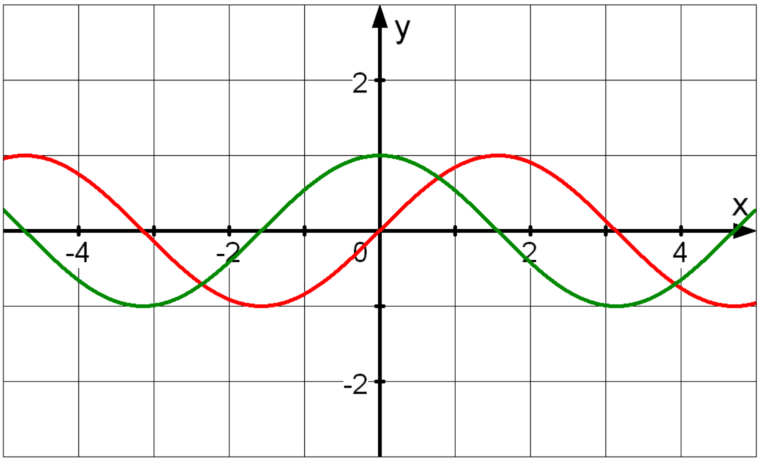
4. Weitere Ableitungregeln

==

4.1 Die Ableitung der Sinus-und Kosinusfunktion

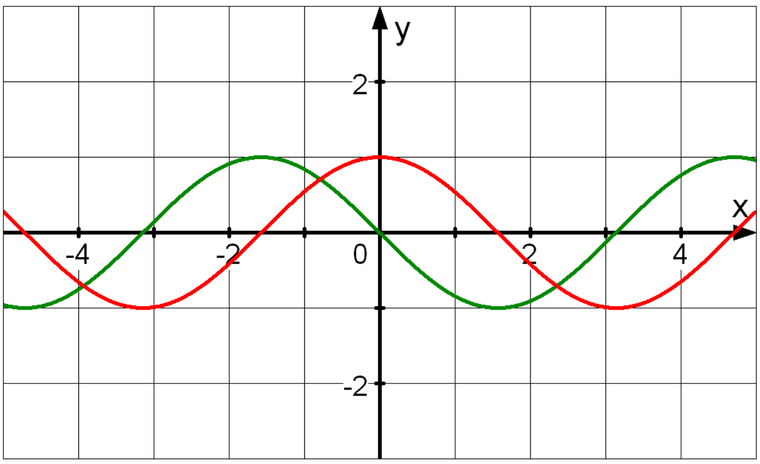
Die Sinusfunktion sin : x $\rightarrow$ sinx ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

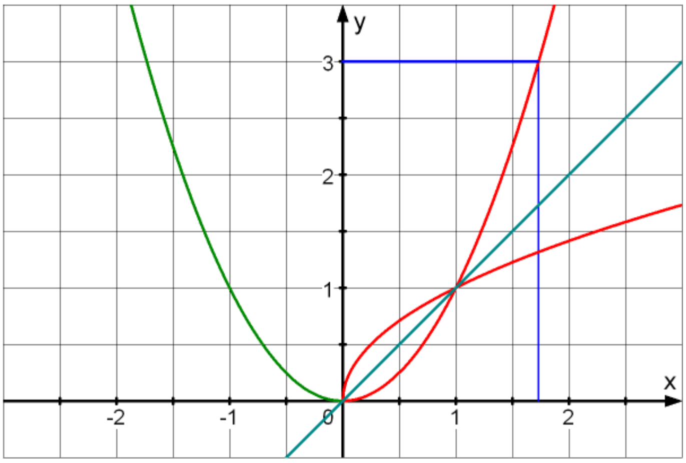


Die Kosinusfunktion cos : x $\rightarrow$ cosx ist in ganz $\mathbb{R}$differenzierbar und es gilt

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$



4.2 Die Umkehrung einer Funktion



Eine Funktion

$f : x \rightarrow y = f(x)$

mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt umkehrbar,

wenn es jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ zuordnen lässt.

Die Zuordnung

$f^{-1} : y \rightarrow f^{-1}(y) = x$

heißt die die ***umgekehrte Zuordnung*** von f. Dabei gilt $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Bezeichnet man die unabhängige Variable y der Umkehrfunktion mit x und die abhängige Variable x mit y, dann erhält man die ***Umkehrfunktion***

$f^{-1} : y \rightarrow f^{-1}(y) = x$

von f.

Den Graphen der Umkehrfunktion von f^{-1} erhält man dann aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

$y = f^{-1}(x)$

erhält durch Auflösen der Funktionsgleichung von f nach x und anschließendem Variablen-tausch.

Beispiel:

Die Quadratfunktion $f: x \to y = f(x) = x^2$ ist für $x \geq 0$ unkehrbar. Es gilt

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

Vertauscht man die Variablen, dann ergibt sich $y = \sqrt{x}$ und damit $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Ist eine Funktion f streng monoton, dann ist sie auch umkehrbar.

Ist eine Funtion auf f im auf einem Intervall stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar und gilt

$$f'(x) > 0 \text{ bzw. } f'(x) < 0$$

für alle x im Innern des Intervalls $x \in I$, dann ist f in I umkehrbar.

Bemerkung:

Die Einschränkung einer Funktion f auf einen ihrer Montononiebereiche ist daher umkehrbar.

Beispiele :

a) $f: x \to \dfrac{x}{x-1}$ mit $D = D_{max}$ ist umkehrbar.

b) $f: x \to x^2 - 2x - 1$ mit $D = [1\,;\infty[$ ist umkehrbar.

c) $f: x \to x^3 - 3x$ mit $D = \mathbb{R}$

in den Montoniebereichen gegeben durch $-\infty < x \leq 1$ bzw. $-1 \leq x \leq 1$ und $1 \leq x < \infty$ jeweils umkehrbar.

Aufgabe aus der Handreichung

Gegeben ist die Funktion $f: x \to \sqrt{6-x}$ in ihrem maximalen Definitionsbereich D_f.

a) Geben Sie D_f an und begründen Sie, dass f umkehrbar ist.

b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion.

Zeichnen Sie die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Graphen schneiden sowie den Inhalt des",,herzförmigen" Flächenstücks, das von den Graphen von f und f^{-1} sowieden Koordinatenachsen im I. Quadranten eingeschlossen wird.

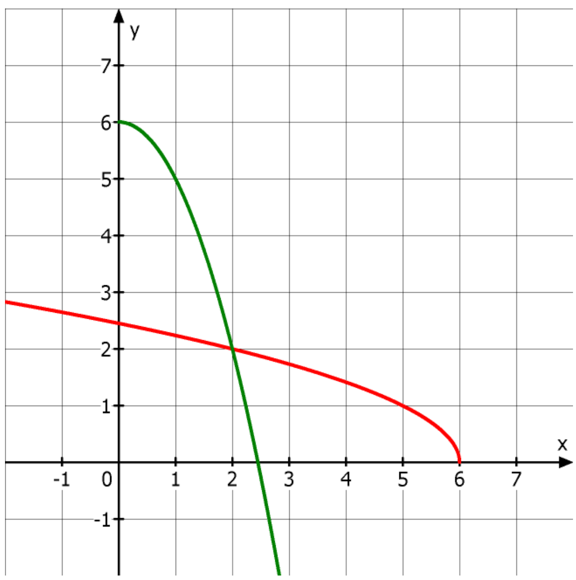
Lösung

a) $D_f =]-\infty; 6]$ und $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{6-x}}\cdot(-1) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{6-x}} < 0$ zeigt,

dass f streng monoton fallend ist, da die Definitionsmenge ein Intervall ist.

b) $D_{f^{-1}} = W_f = [0; \infty[$ und $W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 6]$.

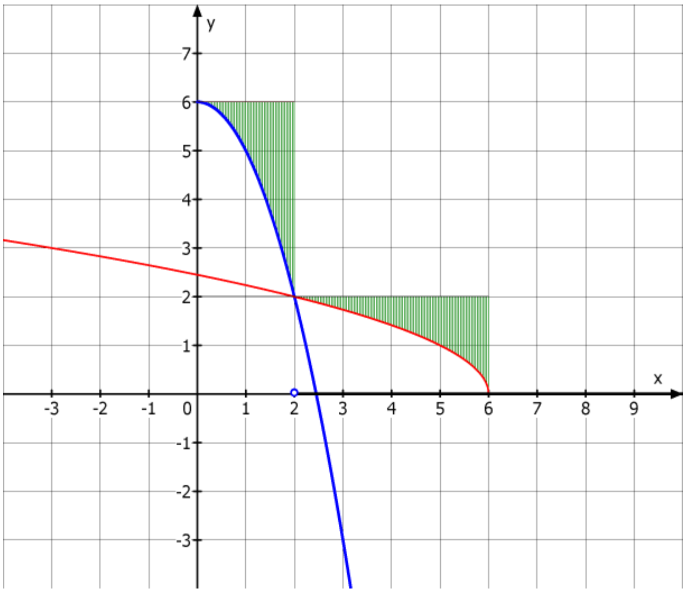
$y = \sqrt{6-x} \quad \Rightarrow \quad x = 6-y^2$ und damit ist $f^{-1}(x) = 6-x^2$.



c) Die Graphen schneiden sich auf der Winkelbierenden des 1. und 3. Quadranten.

$6-x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \lor x = -3$ und damit ergibt sich $S(2 \mid 2)$ als Schniitpunkt.

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ und damit ist } A = 2\cdot(8-\frac{8}{3})+4 = 11\frac{1}{3}$$



Aufgabe aus der Handreichung

Begründen Sie, dass $f: x \rightarrow (x-1)\cdot \ln x$ im Intervall]0; 1] umkehrbar ist.

Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g an.

Überlegen Sie anhand einer Skizze, welcher Grenzwert sich für die Ableitung von g für $x \rightarrow 0+0$ ergibt

Lösung

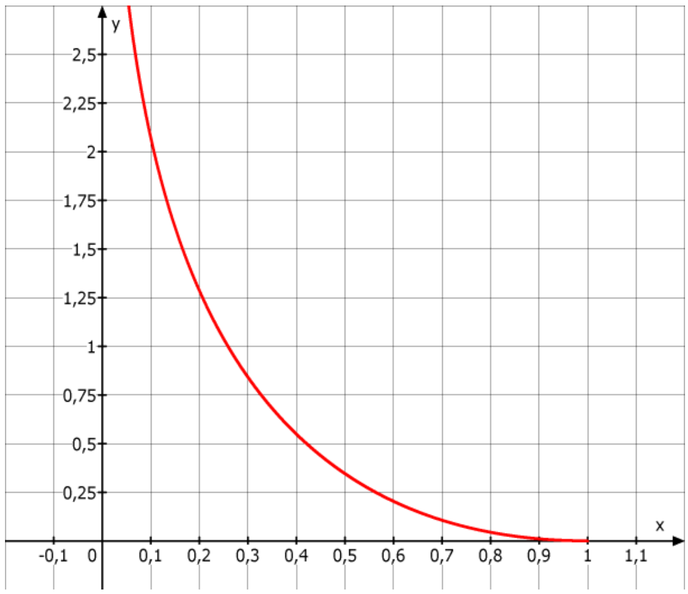
$$f'(x) = 1\cdot \ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} < 0 \text{ für } 0 < x < 1$$

f ist also in]0; 1] streng monoton fallend und daher umkehrbar.

Es gilt $\lim\limits_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \infty$ und $f(1) = 0$ und daher $W_f = [0; \infty[$.

Damit $D_g = [0; \infty[$ und $W_g =]0; 1[$.

Es ist $\lim\limits_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = 0-0$ und daher $\lim\limits_{x \rightarrow 0+0} g'(x) = -\infty$


y
2,5
2,25
2
1,75
1,5
1,25
1
0,75
0,5
0,25
x
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1

4.4 Die Verkettung von Funktionen

Liegt die Wertemenge W_u einer Funktion $v : x \to v(x)$

in der Definitionsmenge D_u einer Funktion $u : x \to u(x)$,

dann ist der Ausdruck $u\left(v(x)\right)$ sinnvoll.

Man nennt man die Funktion

$f : x \to u\left(v(x)\right)$ die ***Verkettung*** von u und v und schreibt $f = u \circ v$.

v heißt ***innere*** und ***äußere Funktion*** der Verkettung.

Beispiele:

a) Für die Funktion $v : x \to x^2 + 1$ und $u : x \to \sqrt{x}$ ist $f(x) = (u \circ v)(x) = u\left(v(x)\right) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) Die Funktion $f : x \to \sin(x^2 + 1)$ entsteht durch Verkettung der Funktion

α) $u : x \to \sin x$ und $v : x \to x^2 + 1$

aber auch

β) $u : x \to \sin(x + 1)$ und $v : x \to x^2$

aber auch

γ) $u : x \to \sin x$, $w : x \to x + 1$ und $v : x \to x^2$

4.5 Die Ableitung verketteter Funktionen - die Kettenregel

Ist $f = u \circ v$ die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v,

dann ist auch f differenzierbar und er gilt $f'(x) = (u \circ v)'(x) = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x)$

Die Bildung des Faktors $v'(x)$ nennt man ***Nachdifferenzieren***.

Beispiele :

a) $f(x) = \sin^2 x$

ist die Verknüpfung der Funktionen u und v mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = \sin x$.

Es ist $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = \cos x$.

Also ist $f'(x) = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$.

b) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ ist die Verknüpfung der Funktionen u und v mit $u(x) = \sin x$ und

$v(x) = x^2 + 1$.

Es ist $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = 2x$.

Also ist $f'(x) = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x) = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2 + 1)$.

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ist die Verknüpfung der Funktionen u und v mit $u(x) = \sin x$ und $v(x) = \frac{1}{x}$.

Es ist $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Also ist $f'(x) = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x) = \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x}$.

d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

ist die Verknüpfung der Funktionen u und v mit $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \sin x$.

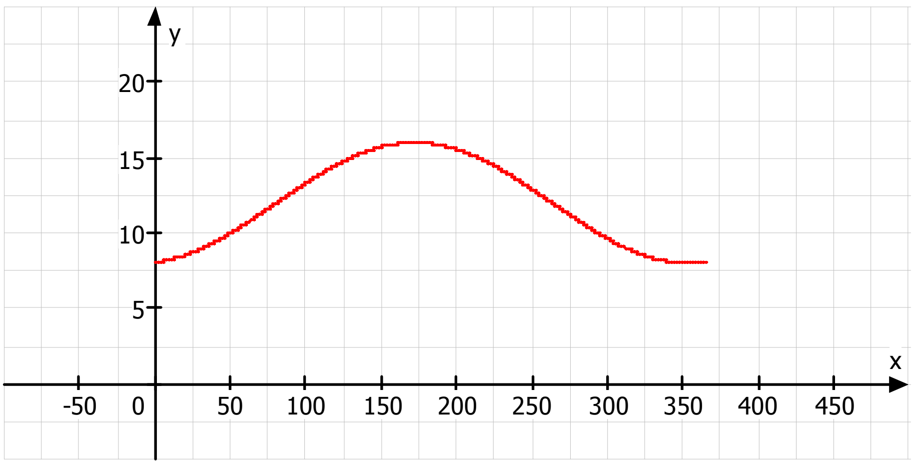
Es ist $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und $v'(x) = \sin x$.

Also ist $f'(x) = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x$.

Aufgabe in der Handreichung

Die Tageslänge (Zeitdauer zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) an einem festen Ort verändert sich im Lauf eines Jahres.

Die Graphik zeigt diese Veränderung fürMünchen.



Die Tageslänge T(x) in Stunden am x-ten Tag des Jahres in München kann in guterNäherung durch eine trigonometrischeFunktion der Form $T(x) = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}\right) + c$ mit $a > 0$) und $c > 0$ modelliert werden.

a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Funktion T die Periode 365 hat und dass unabhängig von a und c bei $x = 172$ ein Maximum vorliegt.

b) Entnehmen Sie dem Graphen Näherungswerte für die Parameter a und c.

c) Geben Sie einen Grund dafür an, dass eine entsprechende Modellierung der Tageslänge am Nordpol nicht mit einer Kosinusfunktion möglich ist.

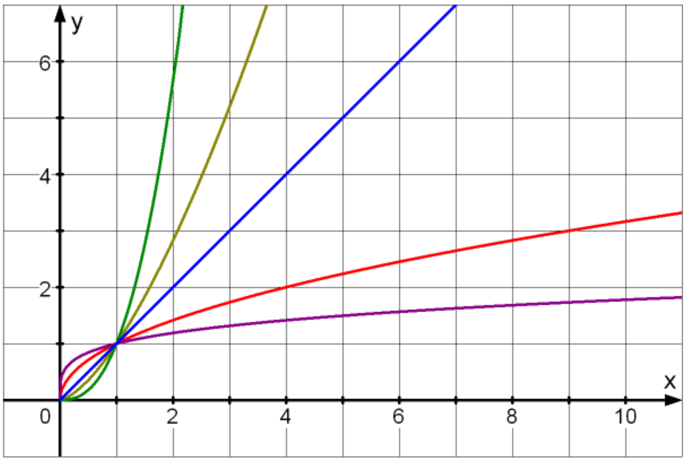
a) $T(x + k \cdot 365) = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x + k \cdot 365 - 172}{365}\right) + c = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x-172}{365} + k \cdot 2\pi\right) + c = T(x)$

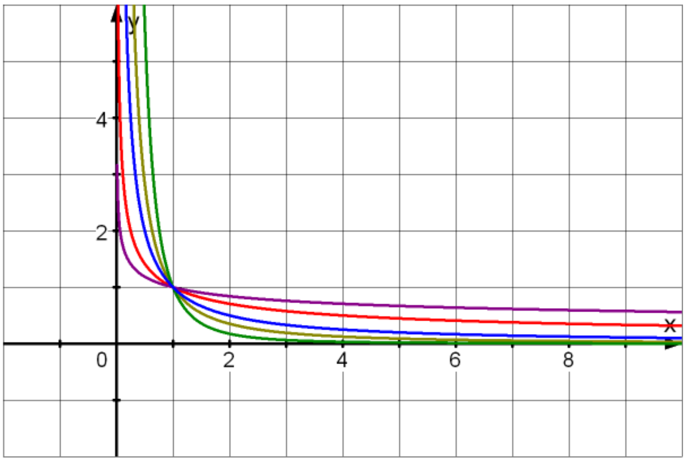
$$T'(x) = -a\cdot\sin\left(2\pi\cdot\frac{x-172}{365}\right)\cdot\frac{2\pi}{265} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\cdot\frac{x-172}{365} = k\cdot\pi \quad \Rightarrow \quad x = 172 + k\cdot\frac{365}{2}$$

$\Rightarrow \quad x = 172$ als einzig sinnvolle Lösung für ein Maximum.

b) T

4.6 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten





Die Funktionen der Form

$f : x \to x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$ bzw. $D = \mathbb{R}^+$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ heißen

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten.

Sie sind in $\mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathbb{R}^+$ differenzierbar und es ist

$$\boxed{f(x) = x^{\frac{p}{q}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}}$$

Speziell gilt :

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$