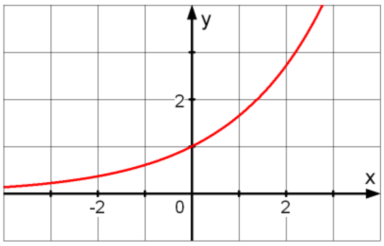
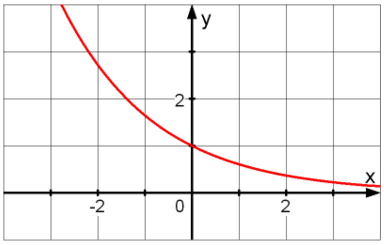
3. Anwendungen

==

3.1 Monotonie





Eine Funktion f heißt in ihrem Definitionsbereich D ***monoton steigend***, wenn für alle

$x_1, x_2 \in$ D mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \le f(x_2)$ gilt.

Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$, dann heißt f ***streng monoton steigend***.

Eine Funktion f heißt in ihrem Definitionsbereich D ***monoton fallend***, wenn für alle

$x_1, x_2 \in$ D mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \ge f(x_2)$ gilt.

Gilt sogar $f(x_1) > f(x_2)$, dann heißt f ***streng monoton fallend***.

Ist f eine in einem Intervall stetige und im Innern des Intervalls differenzierbare Funktion mit

$$\boxed{f'(x) > 0}$$

dann ist f im Intervall I streng monoton steigend.

Bemerkung:

Das Innere eines abgeschlossenen Intervalls erhält man. wenn man die Randpunkte weglässt.

Ein offenes Intervall ist gleich seinem Inneren.

Ist f eine in einem Intervall stetige und im Innern des Intervalls differenzierbare Funktion mit

$$\boxed{f'(x) < 0},$$

dann ist f im Intervall I streng monoton fallend.

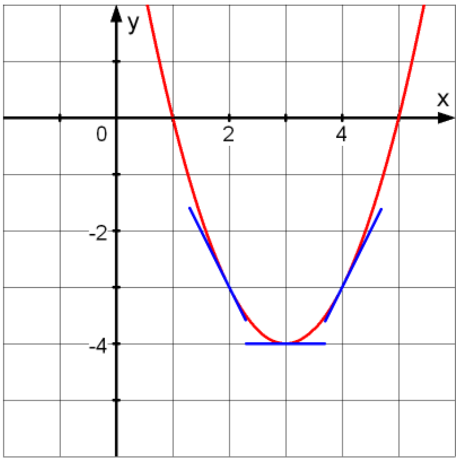
3.2 Zweite Ableitung und Krümmungsverhalten

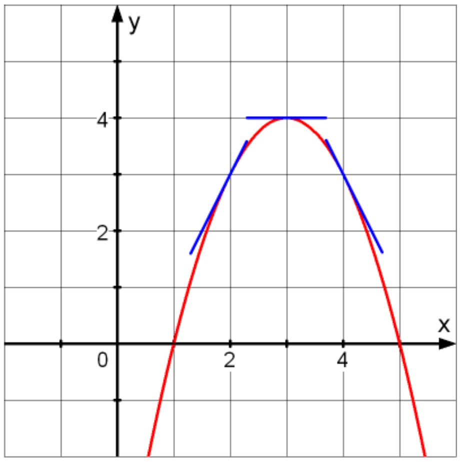
Ist die Ableitungsfunktion f ' einer Funktion f ebenfalls differenzierbar,

dann nennt man die Ableitung von f ' die ***zweite Ableitung*** f ".

Beispiel:

$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x$





Ist eine in einem Intervall stetige Funktion f mit dem Graphen G im Innern des Intervalls zweimal differenzierbar und ist die Ableitungsfunktion f ' streng monoton steigend d.h.

$$\boxed{f''(x) > 0},$$

dann heißt die Funktion f bzw. ihr Graph G in dem Intervall ***linksgekrümmt***.

Ist eine in einem Intervall stetige Funktion f mit dem Graphen G im Innern des Intervalls zweimal differenzierbar und ist die Ableitungsfunktion f ' streng monoton fallend.

$$\boxed{f''(x) < 0},$$

dann heißt die die Funktion f bzw. ihr Graph G in dem Intervall ***rechtsgekrümmt***.

3.3 Extremstellen und Extremwerte

Ist f eine Funktion mit der Definitionsmenge D, dann heißt der Punkt $\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ mit $x_0 \in D$ ***lokaler Hochpunkt*** des Graphen von f, wenn

$$\boxed{\mathbf{f(x) \le f(x_0)}}$$

für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt.

Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt dann ***lokales Maximum*** von f.

Der Punkt $\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ mit $x_0 \in D$ heißt ***lokaler Tiefpunkt*** des Graphen von f, wenn

$$\boxed{\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}}$$

für alle x in einer Umgebung von x_0 gilt.

Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt dann ***lokales Minimum*** von f.

Bemerkungen :

b) Eine Umgebung einer Stelle x_0 ist z.B. ein offenes Intervall, das x_0 enthält

a) Ist der Punkt $\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ ein Hoch- oder Tiefpunkt des Graphen von f,

dann heißt x_0 eine ***Extremstelle*** und $f(x_0)$ ein ***Extremwert*** von f,

b) Ist $f(x) \le f(x_0)$ bzw. $f(x) \ge f(x_0)$ für alle $x \in D$,

dann heißt $f(x_0)$ ***globales*** oder ***absolutes Minimum*** bzw. ***Minimum*** von f.

Ist f eine im Innern eines Intervalls I differenzierbare Funktion und ist x_0 eine im Innern von liegende Extremstelle von f, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{f\,'(x_0) = 0}}$$

Bemerkungen:

a) Ein x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt ***kritischer Stelle*** von f.

b) Mit Hilfe der Ableitung lassen sich nur die Extremstellen im Innern der Definitionsmenge D der Funktion finden.

Punkte auf dem Rand von D müssen extra untersucht werden.

c) Auch Extremstellen, in denen eine Funktion f nicht differenzierbar ist, lassen sich natürlich mit Hilfe der Ableitung von f nicht finden

Ist f eine im Innern eines Intervalls differenzierbare Funktion und x_0 ein kritischer Punkt von f, dann gilt

1. Gibt es eine Umgebung von x_0, in der f links von x_0 streng monoton wachsend und rechts von x_0 streng monoton fallend ist, dann ist $f(x_0)$ ein ***lokales Maximum*** von f.

2. Gibt es eine Umgebung von x_0, in der f links von x_0 streng monoton fallend und rechts von x_0 streng monoton wachsend ist, dann ist $f(x_0)$ ein ***lokales Minimum*** von f

Bemerkung:

Ist ein x_0 ein kritischer Punkt, aber keine Extremstelle von f,

dann ist $\left(x_0; f(x_0)\right)$ ein ***Terrassenpunkt*** d.h. ein ***Wendepunkt mit horizontaler Tangente***.

Ist f eine im Innern eines Intervalls zweimal differenzierbare Funktion und x_0 ein kritischer Punkt von f, dann gilt

1. Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist $f(x_0)$ ein ***lokales Maximum*** von f.

2. Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist $f(x_0)$ ein ***lokales Minimum*** von f.

Bemerkung:

Ist $f''(x_0) = 0$ für einen kritischen Stelle x_0 von f,

dann kann $\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ sowohl lokaler Tiefpunkt, lokaler Hochpunkt als auch Terrassenpunkt sein.

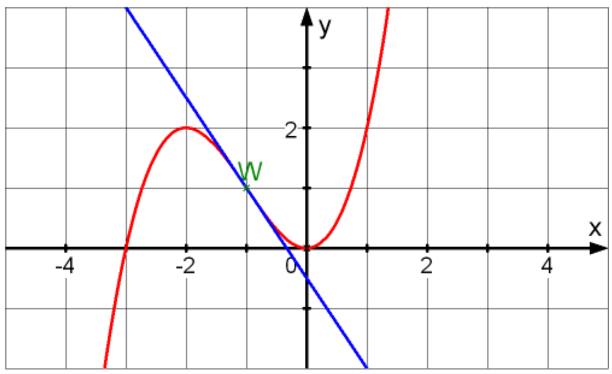
Beispiel:

a) Für $f(x) = x^4$ ist $f'(0) = f''(0) = 0$ und $(0 \mid 0)$ ist Tiefpunkt des Graphen von f.

b) Für $f(x) = -x^4$ ist $f'(0) = f''(0) = 0$ und $(0 \mid 0)$ ist Hochpunkt des Graphen von f.

c) Für $f(x) = x$ ist $f'(0) = f''(0) = 0$ und $(0 \mid 0)$ ist Terrassenpunkt des Graphen von f.

3.4 Wendepunkte



Ein Punkt $W(x_0 \mid f(x_0))$ heißt ***Wendepunkt*** des Graphen G einer Funktion,

wenn f bzw. G in einer Umgebung von x_0 rechts und links von x_0 unterschiedliches Krümmungsverhalten hat.

Ist f zweimal differenzierbar und ist x_0 eine Wendestelle von f, dann ist $f''(x_0) = 0$.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

Bemerkung:

Die Tangente an einen Graphen in einem Wendepunkt heißt ***Wendetangente***.

3.5 Kurvendiskussion

$$\boxed{f: x \rightarrow -\frac{2}{9}x^3 + x^2}$$

1. Definitionsmenge

$D = \mathbb{R}$

2. Symmetrie

Es liegt keine Standardsymmerie des Graphen vor.

3. Verhalten am Rande des Dfinitionsbereichs

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{2}{9}x^3 + x^2\right) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}x + 1\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{2}{9}x^3 + x^2\right) = \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}x + 1\right) = -\infty$$

4. Nullstellen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{9}x^3 + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}x + 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \vee -\frac{2}{9}x + \ = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 4{,}5$$

$S_x(4{,}5 \mid 0)$ und $S_y(0 \mid 0)$

5. Vorzeichenbetrachtung

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 4{,}5$	$4{,}5 < x < \infty$
x^2	+	+	+
$-\frac{2}{9}x + 1$	+	+	–
f(x)	+	+	+

6. Monotonie und Extrema

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \cdot \left(-\frac{1}{3}x + 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \vee -\frac{1}{3}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3$$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$2x$	$-$	$+$	$+$
$-\frac{1}{3}x+1$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

$-\infty < x \leq 0$: f ist streng monoton fallend

$0 \leq x \leq 3$: f ist streng monoton steigend

$3 \leq x < \infty$: f ist streng monoton fallend

$f(3) = -\frac{2}{9} \cdot 3^3 + 3^2 = 3$ $\qquad$ $T\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Tiefpunkt und $H\left(3 \mid 3\right)$ ist ein Hochpunkt.

6. Wendepunkte und Krümmungsverhalten

$f''(x) = -\frac{4}{3}x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1{,}5$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

	$-\infty < x < 1{,}5$	$1{,}5 < x < \infty$
$f''(x)$	$+$	$-$

$-\infty < x \leq 1{,}5$: f ist linksgekümmt

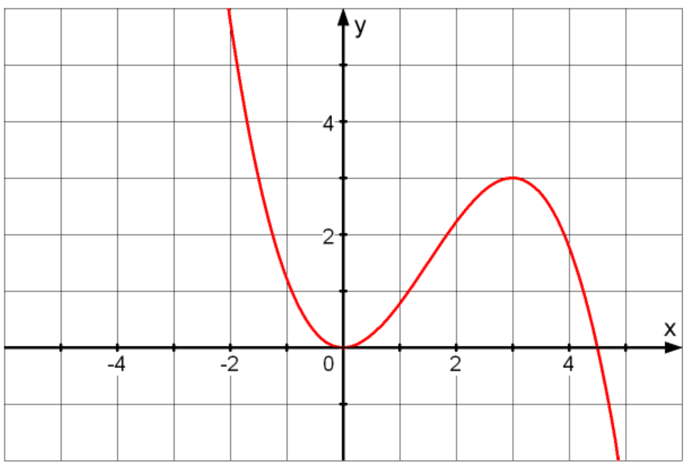
$1{,}5 \leq x < \infty$: f ist rechtsgekrümmt

$f(\frac{3}{2}) = -\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $W\left(1{,}5 \mid 1{,}5\right)$ ist ein Wendepunkt

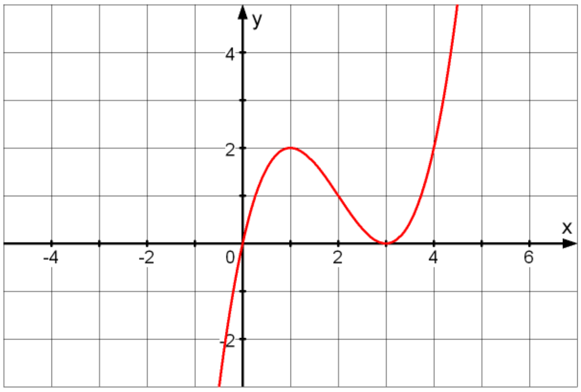
7. Wertemenge

$W = \mathbb{R}$

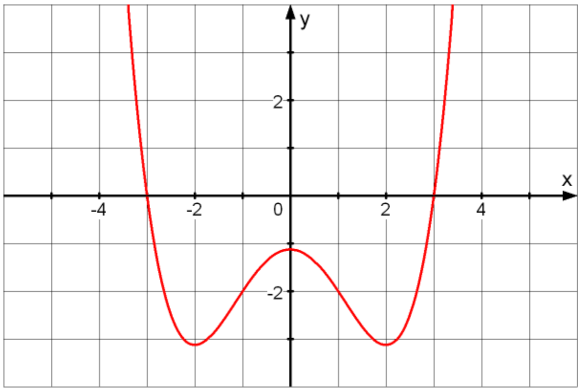
8. Graph



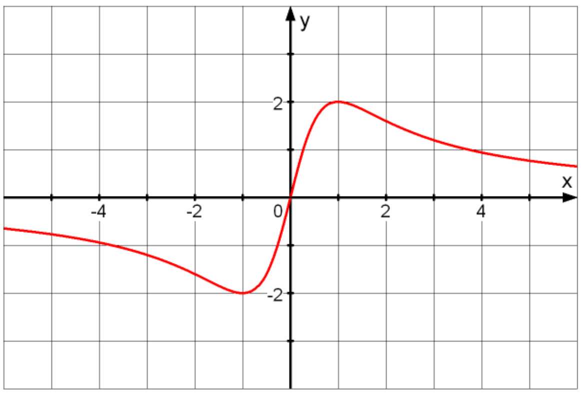
B $\boxed{f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x}$



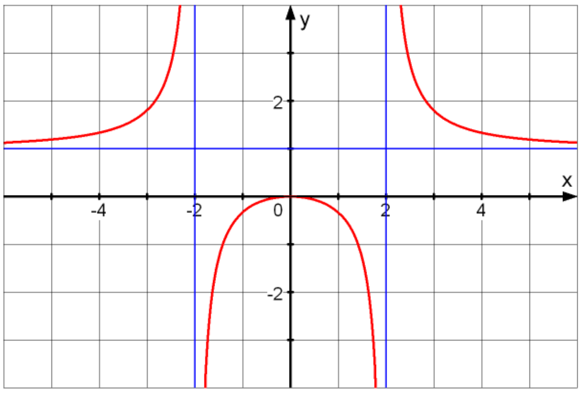
C $\boxed{f: x \rightarrow \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8}}$



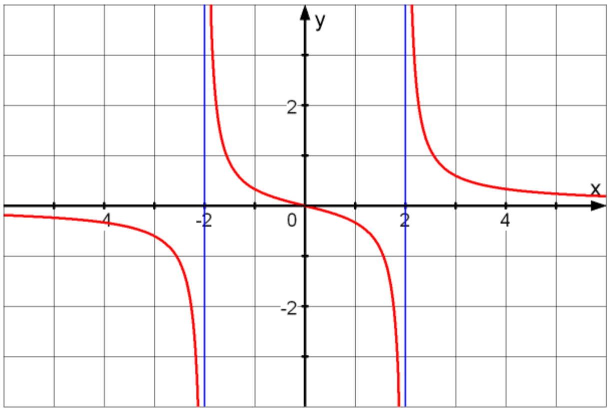
D $f: x \rightarrow \dfrac{4x}{x^2+1}$



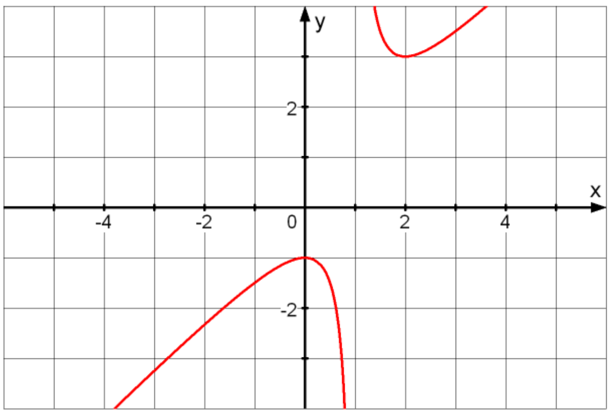
E $f: x \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2-4}$



F $f: x \to \frac{x}{x^2 - 4}$



G $\boxed{f: x \to x + \frac{1}{x-1}}$



Aufgabe in der Handreichung

Im Verlauf einer Kurvendiskussion ergeben sich die Informationen

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

Lässt sich daraus folgern, dass bei x_0 kein Extrempunkt, sondern ein Terrassenpunkt vorliegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Diese Schlussfolgerung lässt sich nicht ziehen.

Gegegenbeispiel:

Für $f: x \rightarrow x^4$ und $x_0 = 0$ gilt $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$

und damit $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$

$(0 \mid 0)$ ist aber ein Tiefpunkt und kein Terrassenpunkt des Graphen von f.

3.6 Das Newtonverfahren

Liegt x_0 in der Nähe einer Nullstelle α einer differenzierbaren Funktion f und ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist

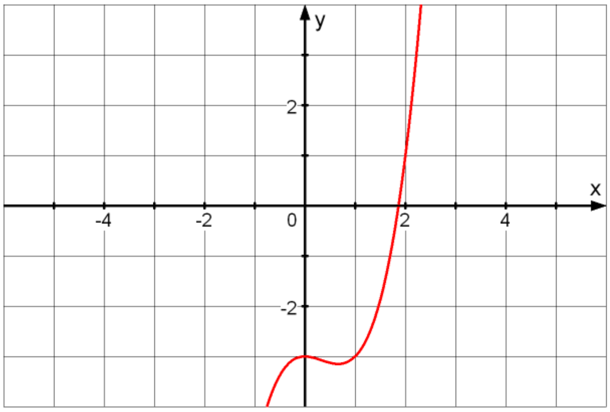
$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

eine bessere Näherung für die Nullstelle α.

Mit der Iteration $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ lässt sich dann α beliebig genau annähern.

Beispiel:

$f : x \rightarrow x^3 - x^2 - 3$



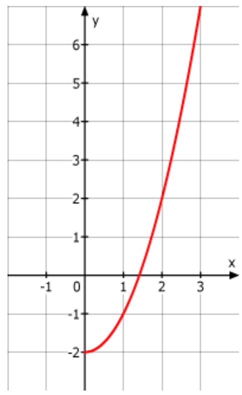
$f'(x) = 3x^2 - 2x$ Rekursionsformel: $x_{k+1} = x_k - \frac{x^3 - x^2 - 3}{3x^2 - 2x^2}$

k	x_k	$f(x_k) = x_k^3 - x_k^2 - 3$	$f'(x_k) = 3x_k^2 - 2x_k$	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	2	1	8	1,875
1	1,875	0,076171875	6,796875	1,86379310345
usw.				

Bemerkung:

Die näherungsweise Berechnung der Schnittstelle α zweier Funktionen f(x) und g(x) lässt sich auf die Berechnung einer Nullstelle der Funktion $f(x) - g(x)$ zurückführen.

Aufgabe in der Handreichung



Das Bild zeigt den Graphen G_f der Funktion $f: x \to x^2 - 2$, $D_f = [0; \infty[$, mit der Nullstelle $\sqrt{2}$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f an der Stelle $x_0 = 2$ sowie die Stelle x_1, an der diese Tangente die x-Achse schneidet.

Zeichnen Sie die Tangente in der Abbildung ein.

b) Erklären Sie die Grundidee des Newton-Verfahrens.

Zeigen Sie, dass die allgemeine Newton-Formel $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ das von Ihnen in Teilaufgabe a) berechnete x_1 liefert

c) Führen Sie einen weiteren Schritt des Newton-Verfahrens durch und zeigen Sie, dass die dadurch gewonnene Näherung weniger als 0,2 % von $\sqrt{2}$ abweicht.

Lösung

a) $f'(x) = 2x$ und damit $f'(2) = 4$

$y = 4\cdot(x-2)+2 = 4x-6$

Schnittstelle: $4x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1{,}5$

b) Die Schnittstelle einer Tangente an den Graphen einer Funktion dient als Näherung für eine Nullstelle der Funktion.

Diese Näherung lässt sich verbessern, wenn man im Graphenpunkt mit dieser Schnittstelle als Abszisse eine Tangente und deren Schnittstelle mit der x-Achse als neuen Näherungswert für die Nullstelle nimmt.

$x_1 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$

c) $x_2 = 1{,}5 - \dfrac{0{,}25}{2\cdot 1{,}5} = \dfrac{17}{12}$

Relativer Fehler: $\left|\dfrac{\frac{17}{12} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| \approx 0{,}17\%$

3.7 Stammfunktionen

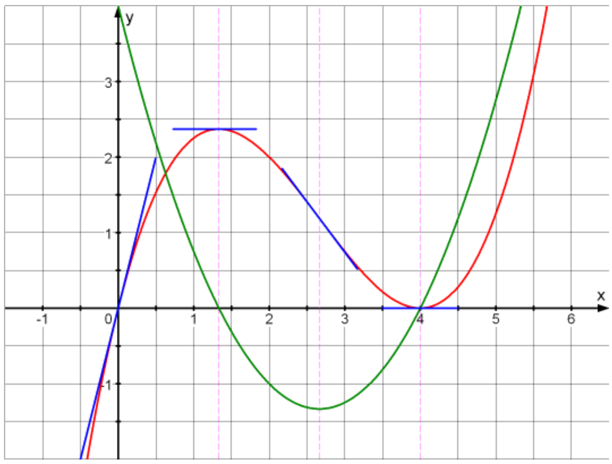
Eine Funktion differenzierbare Funktion F heißt ***Stammfunktion*** einer Funktion f,

wenn $F'(x) = f(x)$ ist.

Bemerkung:

Ist $F : x \rightarrow F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion f,

dann ist auch $F_C : x \rightarrow F(x) + C$ mit einer beliebigen Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.



Zusammenhang zwischen einer Funktion f und einer ihrer Stammfunktionen

Funktion f	Stammfunktion F
positiv	streng monoton steigend
negativ	streng monoton fallend
Nullstelle	waagrechte Tangente
Nullstelle mit VZW $+ \rightarrow -$	Maximumstelle
Nullstelle mit VZW $- \rightarrow +$	Minimumstelle
Extremstelle	Wendestelle
