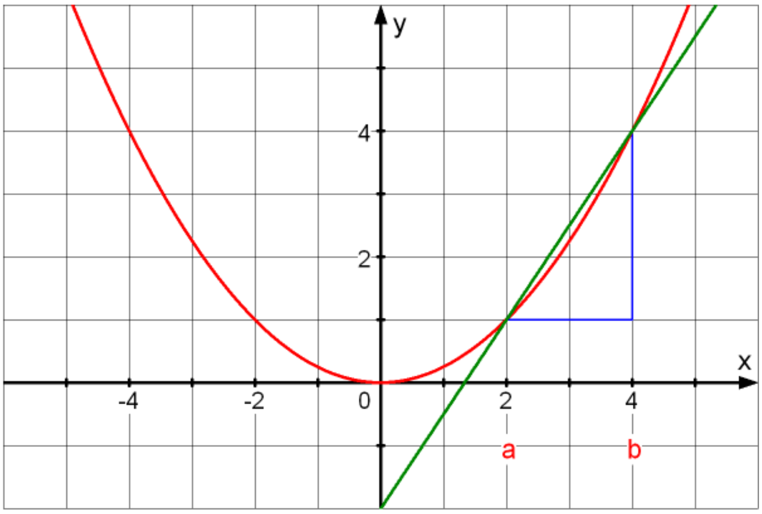
2. Einführung in die Differentialrechnung

===

2. 1 Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate



Ist die Funktion f auf dem Intervall $\left[a;\, b\right]$ definiert, dann nennt man

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Differenzenquotient oder mittlere Änderungsrate von f im Intervall $\left[a;\, b\right]$.

Der Wert $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ des Differenzenquotienten ist gleich der Steigung der Sekante durch

die Punkte $P\left(a \mid f(a)\right)$ und $Q\left(b \mid f(b)\right)$.

Beispiel:

Die mittlere Änderungsraten der Funktion $f : x \rightarrow x^2$ in den Intervallen

$I_1 = \left[1;\, 2\right]$, $I_2 = \left[1;\, 1{,}1\right]$ und $I_2 = \left[1;\, 1{,}01\right]$

sind

$$m_1 = \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3,\ m_2 = \frac{1{,}1^2 - 1^2}{1{,}1 - 1} = 2{,}1 \text{ und } m_3 = \frac{1{,}01^2 - 1^2}{1{,}01 - 1} = 2{,}01$$

2.2 Differentialquotient und lokale Änderungrate

Gehören die Intervall $\left[x_0;\, x\right]$ bzw. $\left[x;\, x_0\right]$ zur Definitionsmenge D einer Funktion

$f : x \rightarrow f(x)$

und existiert existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dann nennt man diesen Grenzwert

Differentialquotient bzw. ***lokale Änderungsrate*** oder Ableitung $f\,'(x_0)$ von f an der an der Stelle x_0.

Der Wert der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(x_0 |\, f(x_0)\right)$.

Beispiel:

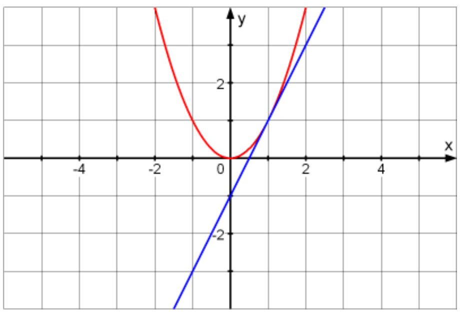
Bestimmung der lokalen Änderungsrate der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $x_0 = 1$

Mittlere Änderungsrate im Intervall oder Differenzenquotient im Intervall $I = \left[1;\, x\right]$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Lokale Änderungsrate:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)\cdot(x - 1)}{x - 1} = 2$$

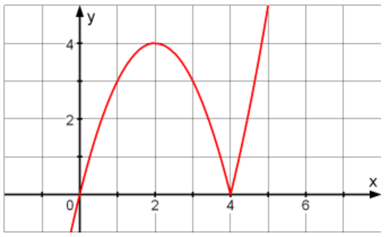


2.3 Differenzierbarkeit

Eine Funktion muss an einer Stelle x_0 nicht differenzierbar sein.

Beispiel:

$$f : x \to x \cdot |x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 4 \\ 4x - x^2, & x < 4 \end{cases}$$



Differenzenquotient für $x > 4$: $\dfrac{f(x) - f(4)}{x-4} = \dfrac{x^2 - 4x - 0}{x-4} = x$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4+0} x = 4$$

Differenzenzenquotient für $x < 4$: $\dfrac{f(x) - f(4)}{x-4} = \dfrac{4x - x^2 - 0}{x-4} = -x$

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4+0} (-x) = -4$$

Die h-Methode

Rechtseitige Ableitung: $\displaystyle \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Linksseitige Ableitung: $\displaystyle \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$

Beispiel:

$f : x \to \dfrac{1}{x^2}$ und $x_0 = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-2h-h^2}{(1+h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = -2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(1-h)^2}-1}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(1-h)^2}-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{+2h-h^2}{(1-+h)^2}}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2+h}{(1-h)^2} = -2$$

Tangente und Normale

Ist die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar mit der Ableitung der $f'(x_0)$, dann lautet die Gleichung der ***Tangente*** an den Graphen von f im Punkt $P\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}$$

Für den Winkel α, den die Tangente mit der positiven x-Achse bildet, gilt

$$\boxed{\tan\alpha = f'(x_0)}$$

Ist $f'(x_0) \neq 0$, dann heißt die Gerade durch $P\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$, die auf der Tangente durch P senkrecht steht, die ***Normale*** zum Graphen von f in P. Für ihre Gleichung gilt

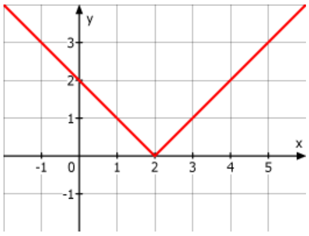
$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)}$$

Aufgabe in der Handreichung

Geben Sie eine Funktion an, die an der Stelle $x = 2$ definiert, aber nicht differenzierbar ist.

Lösung

$f: x \to |x-2|$ ist an der Stelle $x = 2$ nicht differenzierbar.



Aufgabe in der Handreichung

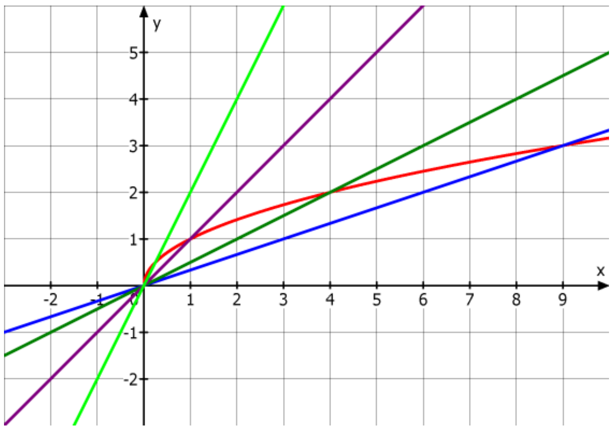
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : x \to \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$,, sowie mehrere Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems und einen weiteren Punkt $\left(x \mid f(x)\right)$ des Graphen von f verlaufen.

Machen Sie anhand Ihrer Zeichnung plausibel, dass sich die Steigung dieser Geraden darstellen lässt als

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Untersuchen Sie das Verhalten dieses Quotienten für $x \to 0+0$. Deuten Sie diesen Grenzwert geometrisch

Lösung



Steigungsdreieck: $m = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

Der Graph von f besitzt im Punkt $O\left(0 \mid 0\right)$ sein vertikale Halbtangente

---

2.4 Ableitungsfunktion

Beispiel:

Ableitung der Funktion $f: x \to f(x) = x^2$ an der Stelle x_0

Differenzenquotient: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x+x_0$

Differentialquotient: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_o+0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_o+0} (x+x_0) = 2x_0$

Ergebnis:

Die Funktion $f: x \to f(x) = x^2$ ist an jeder Stelle x ihres Definitionsbereichs differenzierbar

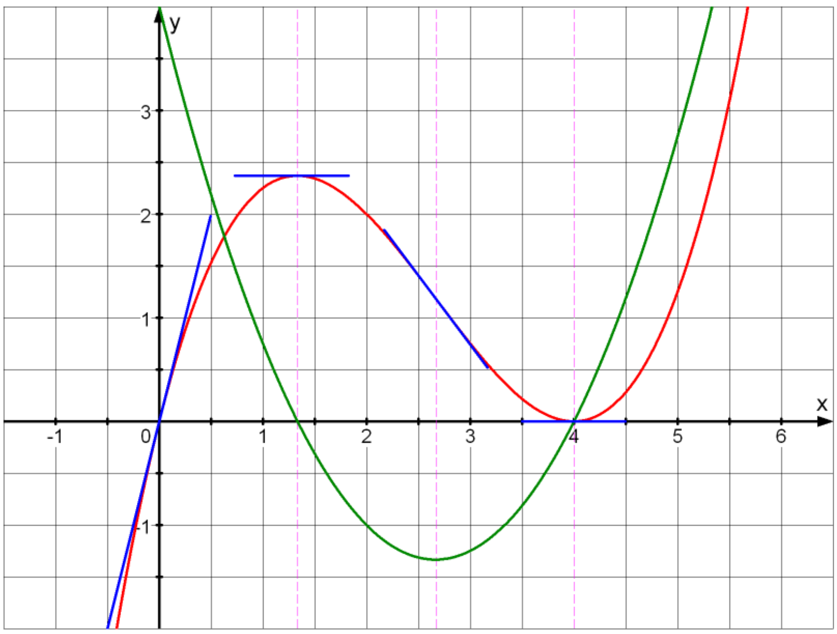
und es gilt $f'(x) = 2x$.

Man nennt die Funktion $f': x \to f'(x) = 2x$ die ***Ableitungsfunktion*** von $f: x \to f(x) = x^2$

Die Funktion $f': x \to f'(x)$,

die jeder Stelle x, an der eine Funktion differenzierbar ist, die Ableitung an dieser Stelle zuordnet, heißt ***Ableitungsfunktion*** vom f.

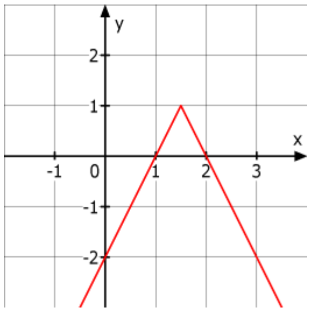
Beispiel:



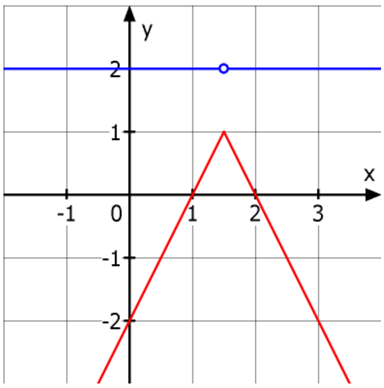
Aufgabe aus der Handreichung

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$.

Zeichnen Sie die Graphen von f und der Ableitungsfunktion f ' in ein Koordinatensystem.



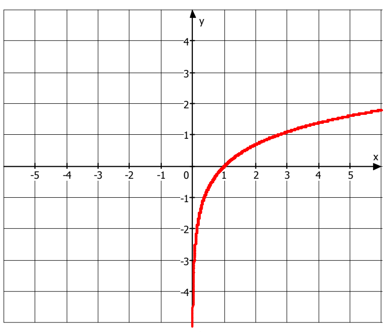
Lösung



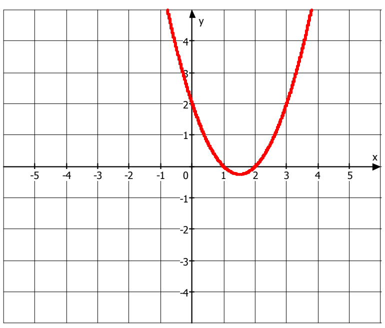
Aufgabe in der Handreichung

Gegeben sind die Graphen dreier Funktionen f, g und h sowie sechs weitere Graphen, darunter die Graphen der Ableitungsfunktionen dieser drei Funktionen.

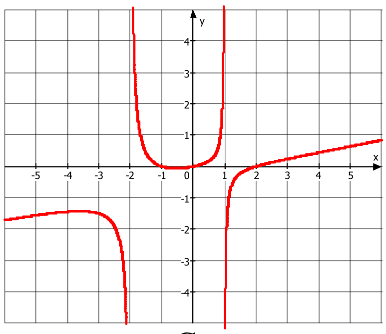
Ordnen Sie die Funktionen ihren Ableitungsfunktionen zu und begründen Sie Ihre Entscheidungen



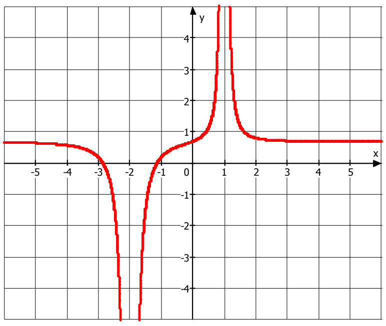
A

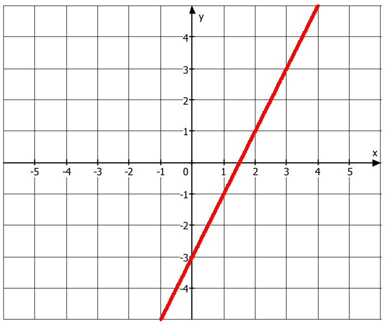


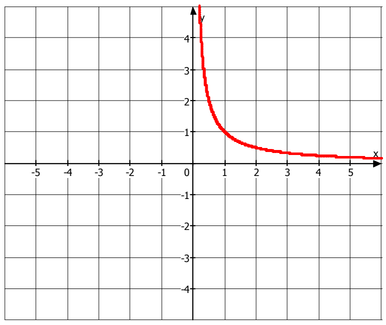
B



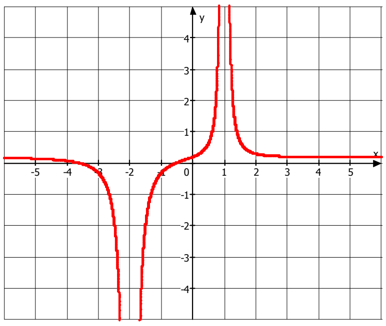
C

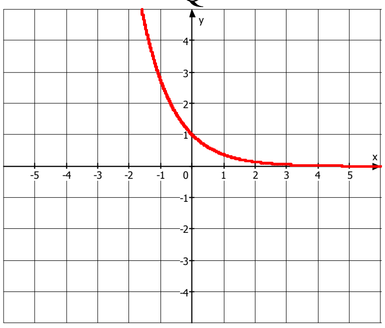


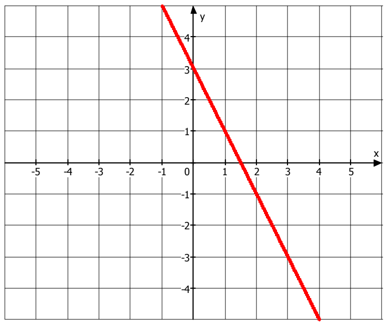




P Q R







S T U

Lösung

A	B	C
R	Q	S

Als Begründung kann man die Monotonie und die Lage der Extrema anführen.

2.5 Stammfunktionen

==

Eine Funktion differenzierbare Funktion F heißt ***Stammfunktion*** einer Funktion f,

wenn $F'(x) = f(x)$ ist.

Bemerkung:

Ist $F : x \to F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion f,

dann ist auch $F_c : x \to F(x) + c$ mit einer beliebigen Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

2.6 Die Ableitung der Potenzfunktionen mit ganzen Exponenten

Es ist

$$(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + ... + x_0^{n-1}) \cdot (x - x_o) = x^n - x_0^n$$

Für die Funktion

$$f : x \to x^n$$

gilt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + ... + x_0^{n-1}) = n \cdot x^{n-1}$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^{-n} - x_0^{-n}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0^n - x^n}{x^n \cdot x_0^n}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{x^n \cdot x_0^n} \cdot \frac{x_0^n - x^n}{x - x_0} \right] =$$

$$= \frac{1}{x_0^{2n}} \cdot \left(- n \cdot x^{n-1} \right) = - n \cdot x_o^{-n-1}$$

> Für die Funktion f mit $f(x) = x^k$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Beispiel:

$$f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

2.7 Summenregel und Faktorregel

==

Sind

$g : x \rightarrow y = g(x)$ und $h : x \rightarrow y = h(x)$

zwei differenzierbare Funktionen, dann ist auch die Summe dieser beiden Funktionen

$f = g + h : x \rightarrow y = f(x) = g(x) + h(x)$

differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{f'(x) = g'(x) + h'(x)}$$

Beispiel:

a) Für $f : x \rightarrow f(x) = x + \sin x$ gilt $f'(x) = 1 + \cos x$

Ist g eine differenzierbare Funktion und $c \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Funktion

$f = c \cdot g : x \rightarrow c \cdot g(x)$

differenzierbar und es gilt

$$\boxed{f'(x) = c \cdot g'(x)}$$

Beispiele:

a) Für $f : x \rightarrow 2 \cdot \cos x$ gilt $f'(x) = 2 \cdot (-\sin x) = -2 \cdot \sin x$

b) Für $f : x \rightarrow 3 \cdot x^3$ gilt $f'(x) = 3 \cdot 3x^2 = 9x^2$

Folgerung :

Jede ganzrationale Funktion f ist differenzierbar. Es gilt

$$\boxed{\deg(f) = n \quad \Rightarrow \quad \deg(f') = n - 1} \text{ für } n \geq 1$$

Beispiel:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^3 - 4x^2$

2.8 Produktregel und Quotientenregel

Sind

$u : x \to u(x)$ und $v : x \to v(x)$

zwei Funktionen mit gemeinsamer Definitionsmenge D, dann heißt die Funktion

$f : x \to f(x) = u(x) \cdot v(x)$

das ***Produkt*** der Funktionen u und v.

Beispiel:

Die Funktion $f : x \to x^2 \cdot \sin x$ ist Produkt der Funktionen

$u : x \to u(x) = x^2$ und $v : x \to v(x) = x^2$

Ist die Funktion f das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen u und v, dann ist auch f differenzierbar, und für die Ableitungsfunktion f ' gilt

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Beispiel:

$f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

Sind

$u : x \to u(x)$ und $v : x \to v(x)$

zwei Funktionen mit gemeinsamer Definitionsmenge D, dann heißt die Funktion

$f : x \to f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

der ***Quotient*** der Funktionen u und v.

Beispiel:

Die Funktion $f : x \to \dfrac{2x}{x+1}$ ist Quotient der Funktionen

$u : x \to u(x) = 2x$ und $v : x \to v(x) = x + 1$

Ist die Funktion f der Quotient zweier differenzierbarer Funktionen u und v, dann ist auch f differenzierbar, und für die Ableitungsfunktion f ' gilt

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2\cdot(x+1) - 2x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$