1. Graphen gebrochen rationaler Funktionen

==

1.1 Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken

Sind $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $a_n \neq 0$, dann heißt der Term

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

reelles Polynom in der Variablen x vom ***Grad*** n. Man schreibt $\deg\left[p(x)\right] = n$.

Beispiel:

$p(x) = x^3 - x + 2$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = -1$ und $a_0 = 2$.

Ein Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt ***Nullstelle*** des Polynoms p(x), wenn $p(x_0) = 0$ ist.

Beispiel:

$x_0 = -1$ ist Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 - x^2 + 2$,

denn $p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$

Lässt sich der Funktionsterm f(x) einer Funktion f in vereinfachter Form als

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit zwei Polynomen p(x) und q(x) mit $\deg\left[q(x)\right] \geq 1$ darstellen, dann heißt f eine gebrochen rationale Funktion mit dem ***Zählerpolynom*** p(x) und dem ***Nennerpolynom*** q(x).

Ist $\deg\left[p(x)\right] < \deg\left[q(x)\right]$, dann heißt f eine ***echt gebrochen rationale Funktion***.

Ist $\deg\left[p(x)\right] \geq \deg\left[q(x)\right]$, dann heißt f eine ***unecht gebrochen rationale Funktion***.

Beispiele:

a) $f: x \to \dfrac{1}{x^2+1}$

mit der maximalen Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}$ ist eine echt gebrochen rationale Funktion.

b) $f: x \to \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

mit der maximalen Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}$ ist eine unecht gebrochen rationale Funktion.

Bemerkungen:

a) Die maximale Definitionsmenge einer gebrochen rationalen Funktion besteht aus allen reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms.

Man nennt die Nullstellen des Nennerpolynoms deshalb auch ***Definitionslücken*** der gebrochen rationalen Funktion.

Beispiele:

a) $f: x \to \dfrac{1}{x^2+1}$ hat die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}$.

b) $f: x \to \dfrac{1}{2x+1}$ hat die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$.

c) $f: x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ hat die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-1;\, 1\}$.

d) $f: x \to \dfrac{1}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x\cdot(x-2)}$ hat die maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{0;\, 2\}$.

b) Die Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochen rationalen Funktion ist eine unecht gebrochen rationale Funktion.

Beispiel:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-2} = \frac{x\cdot(x-2)+1}{x-2} = \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{(x-1)^2}{x-2}.$$

Werden die Funktionswerte einer Funktion f bei rechts- bzw. linksseitiger Annäherung an eine Definitionslücke x_0 beliebig groß bzw. beliebig klein, dann schreibt man

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty.$$

und bezeichnet x_0 als ***Polstelle*** von f.

Die Gerade $x = x_0$ heißt dann ***senkrechte Asymptote*** des Graphen von f.

Bemerkungen:

a) Gilt

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty \text{ bzw. } \lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$$

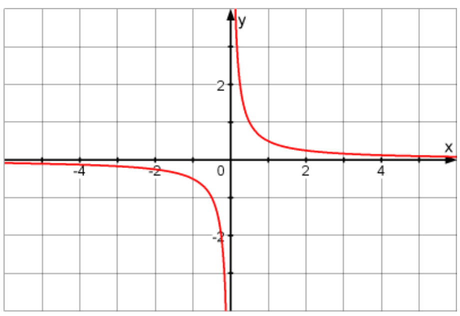
dann heißt x_0 eine ***Polstelle ungerader Ordnung***.

An einer Polstelle ungerader Ordnung wechselt die Funktion f ihr Vorzeichen.

Beispiel:

Die Funktion $f\colon x \to \dfrac{1}{2x}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

hat an der Definitionslücke $x_0 = 0$ einen Pol ungerader Ordnung



Die y-Achse mit der Gleichung $x = 0$ ist eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

b) Gilt

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$$

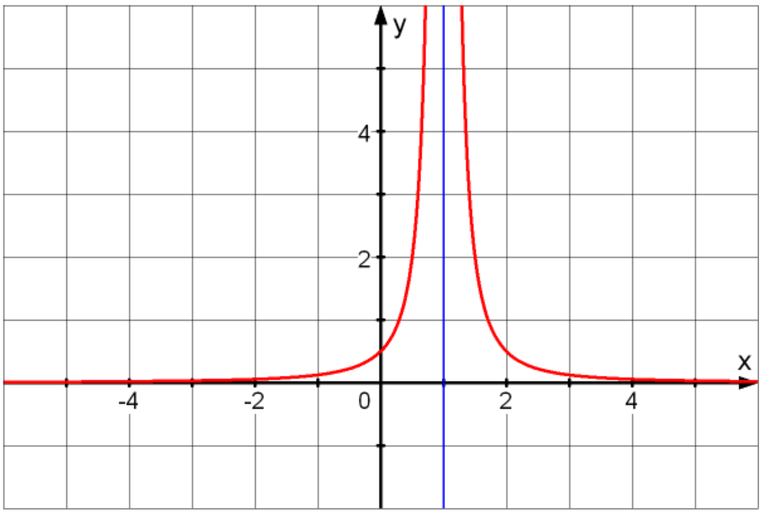
dann heißt x_0 eine ***Polstelle gerader Ordnung***.

An einer Polstelle ungerader Ordnung findet kein Vorzeichenwechsel von f statt.

Beispiel:

Die Funktion $f\colon x \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$ mit $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

hat an der Definitionslücke $x_0 = 1$ einen Pol gerader Ordnung



Die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ ist eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

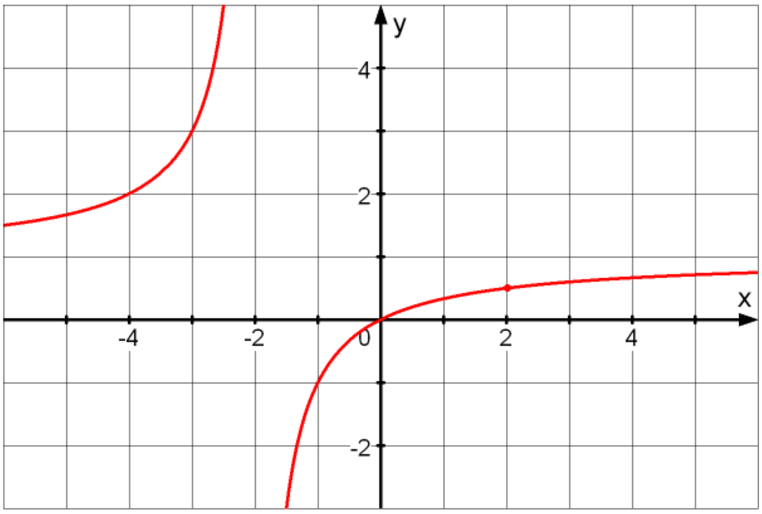
c) Eine Definitionslücke ist nicht zwangsläufig eine Polstelle.

Beispiel: $f : x \to \frac{x^2-2x}{x-2}$

Es ist $f : x \to \frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x}{x+2}$

Also $\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Man schreibt zusammenfassend $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$ und sagt, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ den ***Grenzwert*** 2 besitzt.



Definitionslücken gebrochen rationaler Funktionen

Ist eine Definitionslücke x_0 einer Funktion f eine Nullstelle des Nennerpolynoms ungerader bzw. gerader Ordnung im gekürzten Funktionsterm von f,

dann hat f bei x_0 einen Pol ungerader bzw. ungerader Ordnung.

Andernfalls besitzt die Funktion f bei x_0 einen endlichen Grenzwert.

1.2 Verhalten im Unendlichen

Nähern sich die Funktionswerte einer gebrochen rationalen Funktion für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ immer mehr einer Zahl a an, dann schreibt man

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = a} \text{ bzw. } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = a}$$

und bezeichnet a als ***Grenzwert*** von für x im Unendlichen.

Die Gerade $y = a$ nennt man dann ein ***horizontale Asymotote*** des Graphen von f.

Werden die Funktionswerte von f beliebig klein bzw. beliebig groß, dann schreibt man

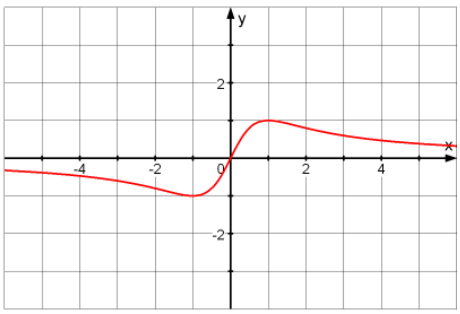
$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty} \text{ bzw. } \boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty} \text{ sowie } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty} \text{ bzw. } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

Fallunterscheidung:

1. $\boxed{\mathbf{deg}\left[\mathbf{p(x)}\right] < \mathbf{deg}\left[\mathbf{q(x)}\right]}$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} = 0 \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

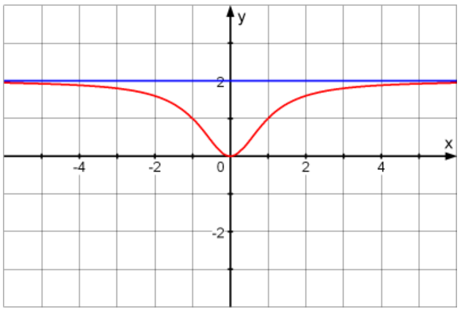


Die x-Achse mit der Gleichung $y = 0$ ist horizontale Asymptote des Graphen von f.

2. $\boxed{\mathbf{deg}\left[\mathbf{p(x)}\right] = \mathbf{deg}\left[\mathbf{q(x)}\right]}$

Beispiel: $f: x \to \frac{2x^2}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2 \text{ und } \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$$



Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ ist horizontale Asymptote des Graphen von f.

3. Die gebrochen rationale Funktion lässt sich als Summe einer linearen Funktion und einer echt gebrochen rationalen Funktion darstellen.

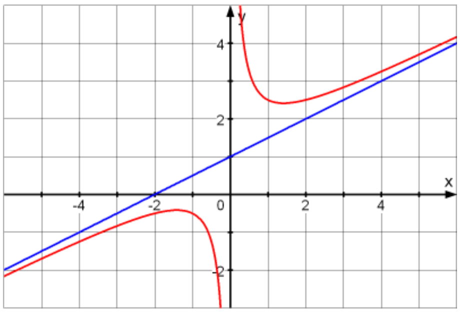
Beispiel :

$$f: x \to f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}$$

Dann gilt zwar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{x}\right) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{x}\right) = -\infty$, aber wegen

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ nähert sich der Graph im Unendlichen der Geraden

$y = \frac{1}{2}x + 1$ an



Man nennt die Gerade $y = \frac{1}{2}x + 1$ eine ***schiefe Asymptote*** des Graphen.

1.3 Kurvendiskussion rationaler Funktionen I

Beispiel:

a) $f : x \to \dfrac{x}{x^2 - 1}$

1. Definitionsmenge

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \lor x = 1$$

und damit $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

2. Symmetrie

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$$

Der Graph G von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung $O\left(0\,|\,0\right)$ des Koordinatensystems.

3. Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \text{ da } \lim_{x \to 1-0} x = 1 \text{ und } \lim_{x \to 1-0} (x^2-1) = 0-0$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = \infty, \text{ da } \lim_{x \to 1+0} x = 1 \text{ und } \lim_{x \to 1+0} (x^2-1) = 0+0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0+0$$

Wegen der Punktsymmetrie gilt

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{x}{x^2-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} \; 0-0$$

Senkrechte Asymptoten: $x = -1$ und $x = 1$

Waagrechte Asymptote: $y = 0$

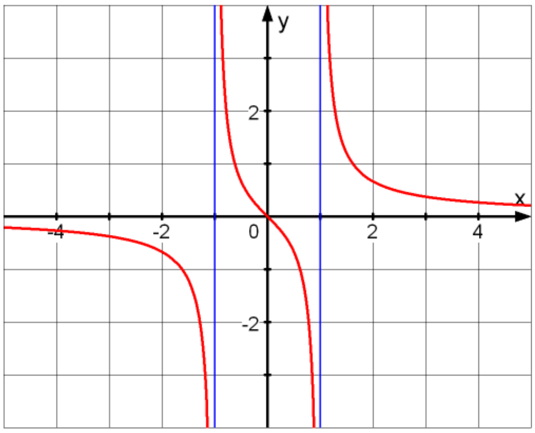
4. Nullstellen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

5. Vorzeichen

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

6. Graph



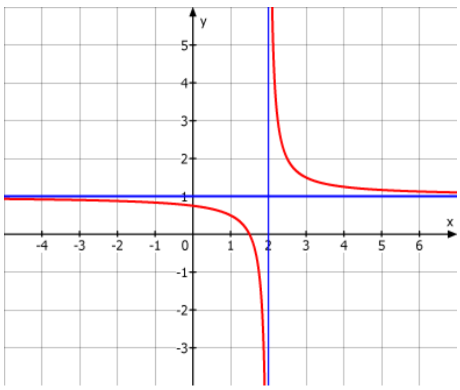
Aufgabe in der Handreichung

Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

$f : x \to \dfrac{2x-3}{2x-4}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Das Bild lässt vermuten, dass G_f symmetrisch

zum Schnittpunkt seiner Asymptoten ist.



Zum Nachweis wird die Funktion g betrachtet, deren Graph G_g aus G_f durch eine Verschiebung um 2 Einheiten in Richtung der negativen x-Achse und um 1 Einheit in Richtung der negativen y-Achse hervorgeht.

Bestimmen Sie einen Term für g und weisen Sie mithilfe von Symmetriebetrachtungen für G_g nach, dass G_f symmetrisch zum Schnittpunkt seiner Asymptoten.

Lösung

$$g(x) = \frac{2\cdot(x+2)-2}{2\cdot(x+2)-4} - 1 = \frac{2x+2}{2x} - 1 = \frac{(2x+2)-2x}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

d.h. der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Die Asymptoten des Graphen von f haben die Gleichungen $x = 2$ und $y = 1$

Der Schnittpunkt der Asymptoten von f ist also $S\left(2 \mid 1\right)$ und wird durch die Verschiebung auf den Koordinatenursprung abgebildet. Also ist der Graph von f zu S punktsymmetrisch.