Übung

==

1. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$.

a) $\frac{4x-8}{8x-4} = 2$

b) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{8x}{2x+4}$

c) $\frac{3x+5}{2x-3} = \frac{5x-3}{3-2x}$

d) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} = 0$

e) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2x-2}$

f) $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{2}{x-1}$

g) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{2x+1}{2x}$

---

2. Löse nach x auf.

a) $\frac{x}{x+a} = a$

b) $\frac{1}{x+a} + \frac{a}{x} = 0$

c) $\frac{ax}{x+1} = 2$

---

3. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$.

$$\left(\frac{x}{2x-1} - 1\right)\cdot\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

---

4. Berechne den Inhalt eines Kreises mit dem Radius $r = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ mm und gib diesen Inhalt in der Einheit m^2 an.

---

5. Berechne

a) $(1{,}6\cdot 10^{-99})^{-2} : (2{,}5\cdot 10^{-102})$

b) $2^{-64}\cdot 4^{-128}$

---

6. Vereinfache

a) $\frac{a^{-3}}{a}$

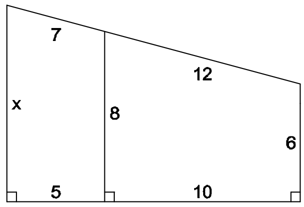
b) $\frac{b}{b^{-3}}$

c) $(-2a^2)^{-3} + (-3a^3)^2$

d) $\frac{(-2a^3\cdot b^{-4})^{-2}}{4^{-1}a^{-4}b^3}$

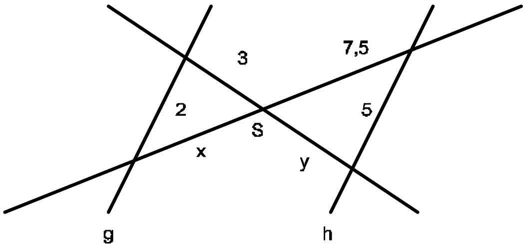
---

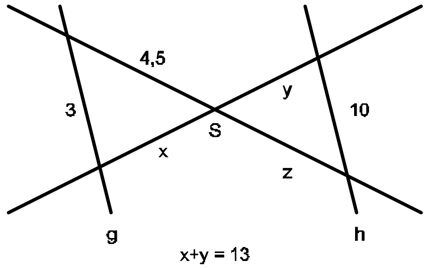
7. Berechne x.

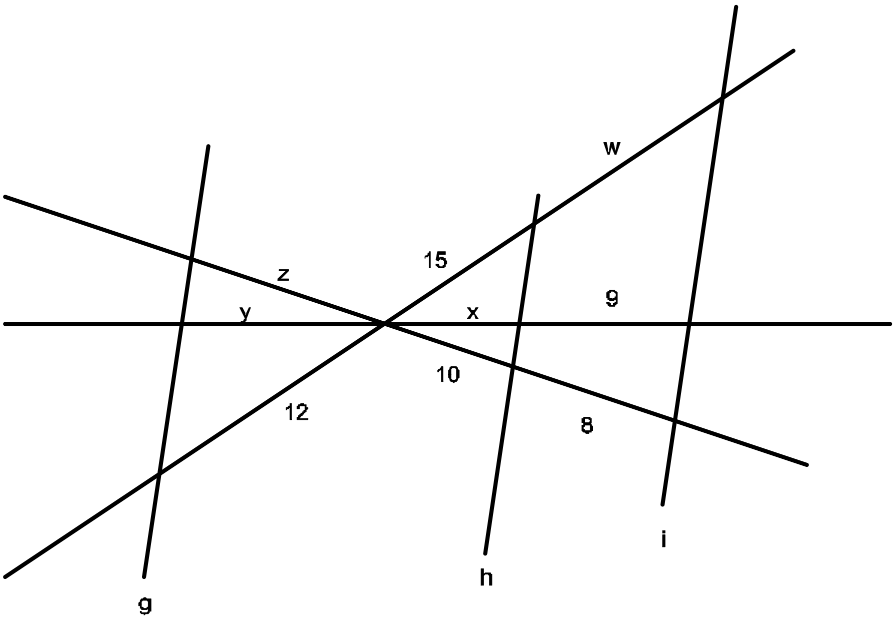


---

8. Die benannten Geraden sind parallel. Berechne die fehlenden Streckenlängen.







Lösungen

==

1. a) $\frac{4x-8}{8x-4} = 2$

Definitionsmenge:

$8x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{0{,}5\}$

Hauptnenner: $8x - 4$

Lösungsmenge:

$\frac{4x-8}{8x-4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 8 = 2\cdot(8x-4) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 8 = 16x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad -12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

----

b) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{8x}{2x+4}$

Faktorsierung der Nenner:

$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{8x}{2\cdot(x+2)}$

Hauptnenner: $2\cdot(x+2)$

Definitionsmenge:

$D = \mathbb{Q}\backslash\{-2\}$

Lösungsmenge:

$(2x-1)\cdot 2 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad 4x-2 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad L = \{-\frac{1}{2}\}$

----

c) $\frac{3x+5}{2x-3} = \frac{5x-3}{3-2x}$

Faktorisierung der Nenner:

$\frac{3x+5}{2x-3} = \frac{5x-3}{(-1)\cdot(2x-3)}$ ergibt Hauptnenner $(-1)\cdot(2x-3)$

Definitionsmenge:

$D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{3}{2}\}$

Lösungsmenge:

$(3x+5)\cdot(-1) = 5x-3 \quad \Leftrightarrow \quad -3x-5 = 5x-3 \quad \Leftrightarrow \quad -8x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$

$L = \{-\frac{1}{4}\}$

d) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} = 0$

Definitionsmenge:

$D = \mathbb{Q}\backslash\{-1;0\}$

Hauptnenner: $x\cdot(x+1)$

Lösungsmenge:

$(x+1)\cdot(x+1) - (x-1)\cdot x = 0$

$x^2+x+x+1-x^2+x = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \quad L = \{-\frac{1}{3}\}$

---

e) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2x-2}$

Faktorisierung der Nenner:

$\frac{1}{x\cdot(x-1)} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2\cdot(x-1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{0;1\}$

Hauptnenner: $2x\cdot(x-1)$

Lösungsmenge:

$2 - 2\cdot2\cdot(x-1) = 5x \Leftrightarrow 2 - 4x+4 = 5x \Leftrightarrow 6 = 9x \Leftrightarrow \frac{2}{3} = x \quad L = \{\frac{2}{3}\}$

---

f) $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{2}{x-1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-1; 1\}$

Hauptnenner: $(x+1)\cdot(x-1)$

Lösungsmenge:

$x\cdot(x-1) - 1\cdot(x-1)\cdot(x+1) = 2\cdot(x+1) \Leftrightarrow x^2-x-(x^2-x+x-1) = 2x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+1 = 2x+2 \Leftrightarrow -1 = 3x \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = x \quad L = \{-\frac{1}{3}\}$

---

g) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{2x+1}{2x}$

Faktorisierung der Nenner:

$\frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x\cdot(x-1)} = \frac{2x+1}{2x}$

Defintionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

Hauptnenner: $2x\cdot(x-1)$

Lösungsmenge:

$(x+1)\cdot 2\cdot(x-1) \; - \; (x-2)\cdot 2 \; = \; (2x+1)\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow$

$2x^2 - 2x + 2x - 2 - 2x + 4 \; = \; 2x^2 - 2x + x - 1$

$2 - 2x \; = \; -x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \; = \; x \quad L \; = \; \{3\}$

2\. a) $\frac{x}{x+a} = a \quad \Rightarrow \quad x = a\cdot(x+a) \quad \Leftrightarrow \quad x = ax + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - ax = a^2 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x\cdot(1-a) = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a^2}{1-a}$

b) $\frac{1}{x+a} + \frac{a}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + a\cdot(x+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + ax + a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(1+a) = -a^2$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-a^2}{1+a}$

c) $\frac{ax}{x+1} = 2 \quad \Rightarrow \quad ax = 2\cdot(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad ax = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad ax - 2x = 2 \quad \Leftrightarrow$

$x\cdot(a-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{a-2}$

3\. $\left(\frac{x}{2x-1} - 1\right)\cdot\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}\backslash\{\frac{1}{2}; 0; -1\}$

Das Produkt hat nur dann den Wert Null, wenn ein Faktor den Wert Null hat.

$\frac{x}{2x-1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1\cdot(2x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot(x+1) - 1\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

Lösungsmenge: $L = \{1: \; -2\}$

---

4. $A = \pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{mm})^2 \approx 7{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{mm}^2 = 7{,}1 \cdot 10^{-14}\ \text{m}^2$

---

5. a) $(1{,}6 \cdot 10^{-99})^{-2} : (2{,}5 \cdot 10^{-102}) = 1{,}6^{-2} \cdot 10^{198} : (2{,}5 \cdot 10^{-102}) =$

$$= \frac{1}{1{,}6^2 \cdot 2{,}5} \cdot 10^{300} = 0{,}15625 \cdot 10^{300}$$

b) $2^{-64} \cdot 4^{-128} = 2^{-64} \cdot (2^2)^{-128} = 2^{-64} \cdot 2^{-256} = 2^{-320}$

---

6. a) $\dfrac{a^{-3}}{a} = a^{-4}$ b) $\dfrac{b}{b^{-3}} = b^4$

c) $(-\frac{1}{2}a^2)^{-3} + (-3a^{-3})^2 = -8a^{-6} + 9a^{-6} = a^{-6}$

d) $\dfrac{(-2a^3 \cdot b^{-4})^{-2}}{4^{-1}a^{-4}b^3} = \dfrac{0{,}25a^{-6}b^8}{0{,}25a^{-4}b^3} = a^{-2}b^5$

---

7. $\dfrac{x-6}{8-6} = \dfrac{19}{12} \Rightarrow x = 9\frac{1}{6}$

8. $\dfrac{2}{5} = \dfrac{x}{7{,}5} \Rightarrow x = 3$

$\dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{y} \Rightarrow y = 7{,}5$

- -

$\dfrac{3}{10} = \dfrac{4{,}5}{z} \Rightarrow z = 15$

$\dfrac{4{,}5}{15} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{4{,}5}{15} = \dfrac{x}{13-x} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 10$

- -

$\dfrac{w}{15} = \dfrac{8}{10} \Rightarrow w = 12$

$\dfrac{x}{9} = \dfrac{10}{8} \Rightarrow x = 11{,}25$

$\dfrac{z}{10} = \dfrac{12}{15} \Rightarrow z = 8$

$\dfrac{y}{11{,}25} = \dfrac{12}{15} \Rightarrow y = 9$