Gebrochen-rationale Funktionen

1. Gegeben: $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ und $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

a) $D_f = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und $D_g = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$

b) $$f(x) = \frac{x+1}{x} \approx \frac{x}{x} = 1 \text{ für} \begin{cases} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$$

Der Graph von f besitzt die waagrechte Asymptote $y = 1$ und die senkrechte Asymptote $x = 0$

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \approx \frac{x}{x} = 1 \text{ für} \begin{cases} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$$

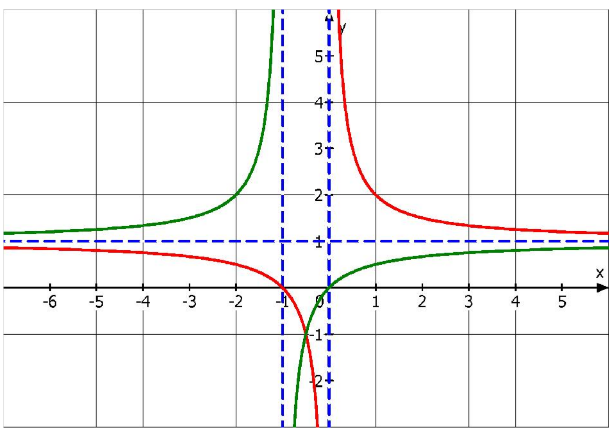
Der Graph von g besitzt die waagrechte Asymptote $y = 1$ und die senkrechte Asymptote $x = -1$.

c) $$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad (x+1)\cdot(x+1) = x\cdot x \quad \Rightarrow \quad x^2+x+x+1 = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$2x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}} = -1$$

Schnittpunkt: $S\left(-\frac{1}{2} \mid -1\right)$



2. Gib die Gleichungen der Asymptoten und der Nullstellen der Funnktionen an.

a) $y = f(x) = \dfrac{4-3x}{2x+1} \approx \dfrac{-3x}{2x} = -\dfrac{3}{2}$ für $\begin{cases} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote $y = -\dfrac{3}{2}$ und die senkrechte Asymptote $x = -\dfrac{1}{2}$.

Nullstelle: $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x+1} = 0 \Rightarrow 4-3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

b) $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x} \approx \dfrac{x}{x^2-3x} = \dfrac{x}{x\cdot(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$ für $\begin{cases} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote $y = 0$ und die senkrechten Asymptote $x = 0$ und $x = 3$.

Nullstelle: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

4.

(I) $f(x) = \dfrac{3x+1}{6x-12}$

- $D = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$

- Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = \dfrac{3x+1}{6x-12} = 0 \Rightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$S_x\left(-\dfrac{1}{3} \mid 0\right)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \dfrac{3\cdot 0+1}{6\cdot 0-12} = -\dfrac{1}{12}$

$S_y\left(0 \mid -\dfrac{1}{12}\right)$

- Waagrechte Asymptote: $y = \dfrac{1}{2}$ Senkrechte Asymptote: $x = 2$

Der Graph F gehört zu f.

(Ii) $G(x) = \frac{4}{(x+3)(x-2)}$

• $D = \mathbb{Q}\backslash\{2; 3\}$

• Kein Schnittpunkt mit der x-Achse

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\left(0 \mid -\frac{2}{3}\right)$

• Waagrechte Asymptote: $y = 0$ Senkrechte Asymptoten: $x = -3$ und $x = 2$

Der Graph B gehört zu g.

(I) $h(x) = \frac{5-6x}{(x-2)^2(x+3)}$

• $D = \mathbb{Q}\backslash\{-3; 2\}$

• Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x\left(\frac{5}{6} \mid 0\right)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\left(0 \mid \frac{5}{12}\right)$

• Waagrechte Asymptote: $y = 0$ Senkrechte Asymptote: $x = 2$ und $x = -3$

Der Graph E gehört zu f.

---

6. Der Funktionsterm $f_3(x)$ gehört zum Graphen.

$f_1(x)$ passt nicht, weil $f_1(x)$ auch negativ werden kann.

$f_2(x)$ passt nicht, weil der Graph von f_2 die senkrechte Asymptote $x = 1$ besitzt.

$f_4(x)$ passt nicht, weil $f_4(x)$ stets negativ ist.

Bruchterme

==

1. Vereinfache soweit wie möglich

a) $\frac{3ab-3b^2}{9b-9a} = \frac{3b\cdot(a-b)}{9\cdot(b-a)} = \frac{-3b\cdot(b-a)}{9\cdot(b-a)} = \frac{-b}{3} = -\frac{b}{3}$

b) $\frac{x^2+x}{6-2x}\cdot\frac{4}{5x^2}\cdot\frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{x\cdot(x+1)}{2\cdot(3-x)}\cdot\frac{4}{5x^2}\cdot\frac{x\cdot(x-3)}{x+1} = \frac{2\cdot(x-3)}{5\cdot(3-x)} = \frac{-2\cdot(3-x)}{5\cdot(3-x)} = -\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{2x^2-2} : \frac{9}{4-4x} = \frac{3}{2x^2-2}\cdot\frac{4-4x}{9} = \frac{3}{2\cdot(x^2-1)}\cdot\frac{4\cdot(1-x)}{9} = \frac{2\cdot(1-x)}{3\cdot(x^2-1)}$

Wenn man weiß, dass $x^2-1 = (x+1)\cdot(x-1)$ ist, dann erhält man

$\frac{2\cdot(1-x)}{3\cdot(x^2-1)} = \frac{-2\cdot(x-1)}{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{-2}{3\cdot(x+1)}$

---

2. a) $x + \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = \frac{x\cdot 2x}{2x} + \frac{2\cdot 2}{2x} - \frac{x\cdot x}{2x} = \frac{2x^2+4-x^2}{2x} = \frac{x^2+4}{2x}$

b) $x + \frac{x-3}{x+2} : \frac{3-x}{2x+x^2} = x + \frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{2x+x^2}{3-x} = x + \frac{-(3-x)}{x+2}\cdot\frac{x(2+x)}{3-x} = x - x = 0$

Punkt vor Strich!

c) $\frac{1}{5x} - \frac{5+x}{5x^2} + \frac{5+2x}{x^3} = \frac{1\cdot x^2}{5x^3} - \frac{(5+x)\cdot x}{5x^3} + \frac{(5+2x)\cdot 5}{5x^3} =$

$= \frac{x^2-(5+x)\cdot x+(5+2x)\cdot 5}{5x^3} = \frac{x^2-5x-x^2-25-10x}{5x^3} = \frac{-15x-25}{5x^3} =$

$= \frac{5\cdot(-3x-5)}{5x^3} = \frac{-3x-5}{x^3}$

d) $1 - \frac{x-3}{x+2} : \frac{3-x}{x+2} = 1 - \frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3-x} = 1 - \frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3-x} = 1 - \frac{x-3}{3-x} =$

$1 - \frac{-(3-x)}{3x-x} = 1 - (-1) = 2$

e) $\frac{3}{2x^2-2} : \frac{9}{4-4x} = \frac{3}{2x^2-2}\cdot\frac{4-4x}{9} = \frac{3}{2\cdot(x^2-1)}\cdot\frac{4\cdot(1-x)}{9} = \frac{2\cdot(1-x)}{3\cdot(x^2-1)}$

Wenn man weiß, dass $x^2-1 = (x+1)\cdot(x-1)$ ist, dann erhält man

$\frac{2\cdot(1-x)}{3\cdot(x^2-1)} = \frac{-2\cdot(x-1)}{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{-2}{3\cdot(x+1)}$

Bruchgleichungen

==

1. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$.

a) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{6-2x} = \dfrac{5}{6x-18}$ mit $D = \mathbb{Q}\backslash\{-2; 3\}$

Umformung der Nenner

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{-2\cdot(x-3)} = \frac{5}{6\cdot(x-3)} \quad \Big| \cdot (-6)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

Beidseitige Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner

$2\cdot(-6)\cdot(x-3) - 1\cdot 3\cdot(x+2) = 5\cdot(-1)\cdot(x+2)$

Ausmultiplizieren

$-12x+36-3x-6 = -5x-10$

Zusammenfassen

$-15x+30 = -5x-10 \quad \Rightarrow \quad -10x = -40 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad L = \{4\}$

---

b) $\dfrac{x+7}{x-1} - \dfrac{x+4}{x-2} = 0 \quad \Big| \cdot (x-1)\cdot(x-2)$

$D = \mathbb{Q}\backslash\{1; 2\}$

$(x+7)\cdot(x-2) - (x+4)\cdot(x-1) = 0$

$(x^2-2x+7x-14) - (x^2+4x-x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+5x-14-x^2-3x+4 = 0 \quad \Rightarrow$

$2x-10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad L = \{5\}$

---

c) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{x+2}{x^2} - \dfrac{5}{6x} = 0 \quad \Big| \cdot 6x^2$

$D = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

$1\cdot 3x + (x+2)\cdot 6 - 5\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x+6x+12-5x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x+12 = 0 \quad \Rightarrow$

$4x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad L = \{-3\}$

e) $\dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{x+1}{2x-4} = \dfrac{x^2}{x-2}$

$D = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$

Umformung der Nenner

$$\frac{2x+1}{2} + \frac{x+1}{2\cdot(x-2)} = \frac{x^2}{x-2} \quad \Bigg| \cdot 2\cdot(x-2)$$

$(2x+1)\cdot(x-2) + (x+1) = x^2\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x + x - 2 + x + 1 = 2x^2 \quad \Rightarrow$

$-2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \{-\dfrac{1}{2}\}$

---

f) $\dfrac{3}{2x+4} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x-2}{x^2+2x}$

$D = \mathbb{Q}\backslash\{-2; 0\}$

Umformung der Nenner

$$\frac{3}{2\cdot(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{x-2}{x\cdot(x+2)} \quad \Bigg| \cdot 2x\cdot(x+2)$$

Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner und Lösung

$3\cdot x = 1\cdot(x+2) - (x-2)\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = x + 2 - 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad 3x = -x + 6 \quad 4x = 6 \quad \Rightarrow$

$x = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \{\dfrac{3}{2}\}$

Potenzen

1. Berechne

---

a) $-3 \cdot 5^2 : (-3)^3 = -3 \cdot 25 \cdot (-27) = 2025$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{0} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} - 4^{-1} = 2^3 + 1 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2} - \dfrac{1}{4^1} = 8 + 1 + \dfrac{25}{4} - \dfrac{1}{4} = 15$
