Gleichungen mit zwei Unbekannten - implizite Geradengleichungen

==

• Eine Gleichung der Form

$$ax + by = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{Q},$$

wobei a und b nicht zugleich Null sind, heißt lineare Gleichung mit den zwei Lösungsvariablen x und y.

Die Lösung einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten besteht aus allen Zahlenpaaren

$\left(x \mid y\right)$, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergeben. Jedes Zahlenpaar

lässt sich als Punkt im Koordinatensystem deuten.

► $3x + 2y - 4 = 0$

ist eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten. Lösungspunkte sind

$\left(4 \mid -4\right), \left(0 \mid 2\right), \left(-2 \mid -2\right)$ usw.

► Die Lösungspunkte bilden im Koordinatensystem. Man nennt daher eine Gleichung mit zwei Unbekannten auch explizite Geradengleichung.

► Eine lineare Gleichung, in der nur die Variable x vorkommt, ist die Gleichung einer Geraden parallel zur y-Achse. Kommt in der linearen Gleichung nur die Variable y vor, dann handelt es sich um eine Gerade parallel zur x-Achse.

Beispiel :

$2y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1,5.

$2x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$ ist eine Parallele zur y-Achse im Abstand 1,5.

Die systematische Lösung eines linearen Gleichungssystems

==

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten, dann bestimmt man den im Prinzip den Schnittpunkt zweier Geraden.

Je nachdem ob die Geraden sich in einem Punkt schneiden, echt parallel oder identisch sind, gibt es eine, keine oder unendlich viele Lösungen.

Folgende Methoden können zur Lösung eines linearen Gleichungssystems bestehend aus zwei Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen angewendet werden :

A Gleichsetzungverfahren

Beispiel :

(1) (2)	$x + 2y = 2$ $2x - y = -6$	
(1')	$2y = -x + 2$ $y = -\frac{1}{2}x + 1$	**Auflösen der Gleichung (1)**
(2')	$-y = -2x - 6$ $y = 2x + 6$	**Auflösen der Gleichung (2)**
(1') = (2')	$-\frac{1}{2}x + 1 = 2x + 6$ $-\frac{5}{2}x = 5$ $x = -2$	**Gleichsetzen** **und** **Lösen der sich ergebenden Gleichung**
$x = 2$ in (2')	$y = 2\cdot(-2) + 6 = 2$	**Einsetzen**
	$L = \left\{(-2;\,2)\right\}$	**Lösungsmenge**

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die für die Variable erhaltenen Terme gleich.

B Einsetzverfahren

----

(1) (2)	$x + 2y = 3$ $3x + 4y = 5$	
(1')	$x = -2y + 3$	**Auflösen**
(1') in (2)	$3 \cdot (-2y + 3) + 4y = 5$ $-6y + 9 + 4y = 5$ $-2y + 9 = 5$ $y = 2$	**Einsetzen** **und** **Lösen der sich ergebenden Gleichung**
$y = 2$ in (1')	$x = -2 \cdot 2 + 3 = -1$	**Einsetzen**
	$L = \{(-1;\, 2)\}$	**Lösungsmenge**

Beim Einsetzungsverfahren löst man eine Gleichungen nach einer Variablen auf und setzt den für diese Variable erhaltenen Term in die andere Gleichung ein.

C Additionsverfahren

----

(1) (2)	$2x + 3y = 1$ $3x + 4y = 2$	
$3 \cdot (1)$	$6x + 9y = 3$	**Multiplikation von (1) ergibt Gleichung (3)**
$-2 \cdot (2)$	$-6x - 8y = -4$	**Multiplikation von (2) ergibt Gleichung (4)**
$(3) + (4))$	$y = -1$	**Addition der neuen Gleichungen**
$y = -1$ in (1)	$2x + 3 \cdot (-1) = 1$ $x = 2$	**Einsetzen**
	$L = \{(2;\ -1)\}$	**Lösungsmenge**

Beim Additionsverfahren multipliziert man eine oder beide Gleichungen so, dass sich bei der Addition beider Gleichungen eine Gleichung ergibt, die nur mehr eine Variable enthält.

Aufgaben

==

1. Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren und veranschauliche graphisch

a) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 3x - y & = & 2 \\ (2) & 6x + 2y & = & 5 \end{array}$

b) a) $\begin{array}{l|lcl} (1) & x + 0{,}5y & = & 1 \\ (2) & 4x - 2y & = & 3 \end{array}$

---

2. Löse mit dem Einsetzverfahren

a) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 2x - y & = & -1 \\ (2) & x + 2y & = & -2 \end{array}$

b) $\begin{array}{l|lcl} (1) & -x + 3y & = & -8 \\ (2) & 5x - 4y & = & 16 \end{array}$

---

3. Löse mit dem Additionsverfahren

a) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 7x + 11y & = & -6 \\ (2) & 9x + 12y & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 9x + 12y & = & -3 \\ (2) & 7x + 11y & = & 6 \end{array}$

c) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 3x - 2y & = & 5 \\ (2) & 2x + 5y & = & 16 \end{array}$

---

4. Bestimme die Lösungsmenge

a) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 2x - y & = & 2 \\ (2) & x - \frac{1}{2}y & = & 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{l|lcl} (1) & 2x - y & = & 2 \\ (2) & x - \frac{1}{2}y & = & 1 \end{array}$
